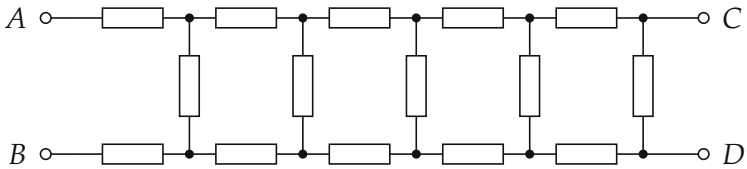
Цепь из нескольких звеньев

Задача 3. [МОШ 2022/23, 9 класс, задача 3] Электрическая цепь, показанная на рисунке, составлена из пяти одинаковых звеньев, в каждом из которых содержится три одинаковых резистора сопротивлением R. Выводы A и D, а также C и B соединяют проводниками пренебрежимо малого сопротивления попарно. Определите сопротивление между точками A и B образовавшейся цепи.



▲ **Решение. Что происходит.** После соединения выводов цепь замыкается «в кольцо», и у неё появляется симметрия: поворот рисунка на 180° переводит A в D и B в C, то есть A — в тот же узел A, а B — в тот же узел B. Значит, при подключении к A и B потенциалы симметричных узлов равны, и неизвестных потенциалов остаётся четыре вместо восьми. Дальше — законы Кирхгофа (сохранение заряда в узлах) и закон Ома.

Обозначения. Подключим к A и B источник: $\varphi_A = U$, $\varphi_B = 0$. Узлы верхней линии слева направо — $1, 2, 3, 4$ (потенциалы $x_1, \dots, x_4$), нижней — $1', 2', 3', 4'$; I — полный ток от A к B.

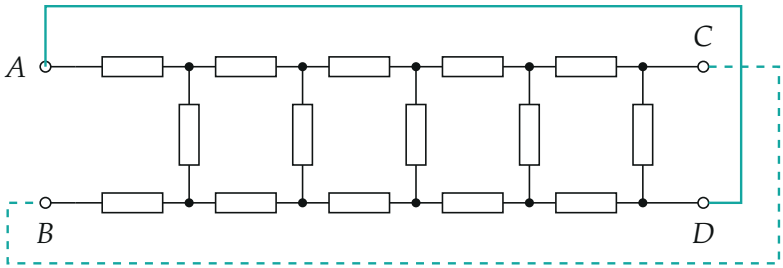


Рис. 2. Цепь после соединения: провод A–D (сплошной бирюзовый) и провод C–B (пунктир). Левый нижний резистор при этом идёт от B, а правая вертикальная перемычка соединяет C = B и D = A

1. Симметрия. Повернём рисунок 2 на 180°: верхняя линия станет нижней и пойдёт справа налево, узел 1 перейдёт в $4'$, 2 — в $3'$ и т. д. Выводы A и D поменяются местами, но это один узел; то же с B и C. Цепь и подключение не изменились, значит, распределение потенциалов тоже прежнее:

$$\varphi_{4'} = x_1, \qquad \varphi_{3'} = x_2, \qquad \varphi_{2'} = x_3, \qquad \varphi_{1'} = x_4.$$

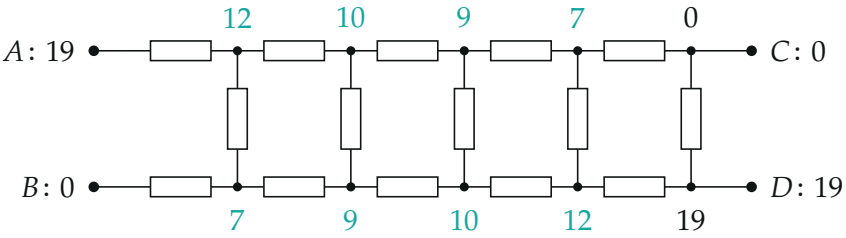


Рис. 3. Потенциалы узлов в единицах $U/19$ (бирюзой; их найдём в п. 3); провода не показаны, их концы подписаны. Узлы, переходящие друг в друга при повороте на 180°, имеют равные потенциалы

2. Правило узлов для верхних узлов. Для узла 1 сумма токов, втекающих по трём резисторам (из A, из узла 2 и по перемычке из $1'$), равна нулю; по закону Ома ток через резистор равен разности потенциалов, делённой на R. Сокращая на R:

$$\begin{aligned}
&\text{узел 1:} && (U - x_1) + (x_2 - x_1) + (x_4 - x_1) = 0,\\
&\text{узел 2:} && (x_1 - x_2) + (x_3 - x_2) + (x_3 - x_2) = 0,\\
&\text{узел 3:} && (x_2 - x_3) + (x_4 - x_3) + (x_2 - x_3) = 0,\\
&\text{узел 4:} && (x_3 - x_4) + (0 - x_4) + (x_1 - x_4) = 0.
\end{aligned}$$

В последнем уравнении 0 — потенциал узла C, соединённого с B. Для нижних узлов уравнения те же по симметрии.

3. Решаем. Из второго и третьего: $x_1 = 3x_2 - 2x_3$, $x_4 = 3x_3 - 2x_2$; из четвёртого $x_1 + x_3 = 3x_4$, то есть $3x_2 - x_3 = 9x_3 - 6x_2$, откуда $x_3 = \frac{9}{10}x_2$, $x_1 = \frac{12}{10}x_2$, $x_4 = \frac{7}{10}x_2$. Первое уравнение: $U = 3x_1 - x_2 - x_4 = \frac{19}{10}x_2$.

Итак, в единицах $U/19$:

$$x_1 = 12, \quad x_2 = 10, \quad x_3 = 9, \quad x_4 = 7.$$

4. Полный ток. Из узла A ток уходит по трём резисторам: верхнему левому (к узлу 1), нижнему правому (из $D = A$ к узлу $4'$) и правой перемычке (из $D = A$ к $C = B$):

$$I = \frac{U - x_1}{R} + \frac{U - \varphi_{4'}}{R} + \frac{U - 0}{R} = \frac{U}{R}\left(\frac{7}{19} + \frac{7}{19} + 1\right) = \frac{33}{19} \cdot \frac{U}{R}.$$

Сопротивление

$$R_{AB} = \frac{U}{I} = \frac{19}{33}R.$$

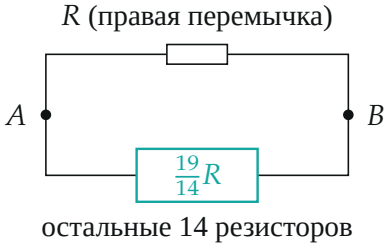


Рис. 4. Правая перемычка соединяет A и B напрямую и включена параллельно остальной цепи: $I_{ост} = \frac{14}{19} \cdot \frac{U}{R}$, то есть $R_{ост} = \frac{19}{14}R$

Обратите внимание. После соединения выводов правая перемычка оказывается подключённой прямо к A и B; поэтому ответ обязан быть меньше R — и он меньше: $\frac{19}{33}R \approx 0{,}58R$.

Проверка. Баланс токов в узле 1: втекает $(19 - 12) = 7$, вытекает к узлу 2 $(12 - 10) = 2$ и в перемычку $(12 - 7) = 5$ (в единицах $U/(19R)$), $7 = 2 + 5$. Тот же ответ дал расчёт на python методом узловых потенциалов без использования симметрии (все 10 узлов): $R_{AB} = 19R/33$.

Параллельное соединение: $\dfrac{R \cdot \frac{19}{14}R}{R + \frac{19}{14}R} = \dfrac{19}{33}R.$

Смысл: симметрия при повороте вдвое сокращает число неизвестных, а прямое соединение A и B одним резистором сразу даёт оценку сверху.

Ответ. $R_{AB} = \dfrac{19}{33}R \approx 0{,}58R.$