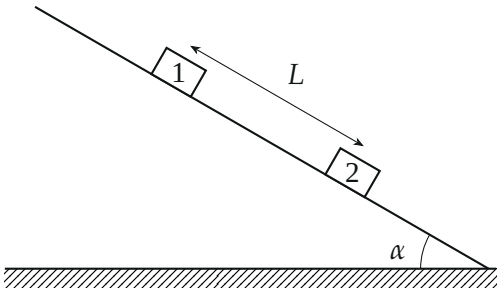
Столкновения на плоскости

Задача 4. [МОШ 2022/23, 9 класс, задача 4] На расстоянии $L = 10$ см друг от друга на достаточно протяжённой наклонной плоскости, составляющей угол $\alpha = 30°$ с горизонталью, удерживаются два абсолютно одинаковых бруска. В момент времени $t = 0$ бруски освобождают и они начинают двигаться. Величины, относящиеся к верхнему в начальный момент бруску, далее помечаем индексом 1, а относящиеся к нижнему индексом 2. Обозначим $v_1(t)$ и $v_2(t)$ скорости брусков в момент времени t. Коэффициенты трения о плоскость равны $\mu_1 = \dfrac{\sqrt{3}}{6}$ и $\mu_2 = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$. Ускорение свободного падения считается равным 10 м/с^2. Размеры брусков пренебрежимо малы, столкновения между ними являются абсолютно упругими.

4a. Для первой секунды движения изобразите графики зависимостей $v_1(t)$ и $v_2(t)$. В какие моменты времени происходят столкновения брусков?

4b. Какое расстояние проходит первый брусок (верхний в исходной конфигурации) к моменту n-го столкновения?



Поясняющий рисунок. Брусок 1 выше по склону, брусок 2 ниже на расстоянии L

▲ **Решение.** **Что происходит.** Сначала найдём, как движется каждый брусок сам по себе. У нижнего $\mu_2 = \operatorname{tg} 30°$: сила трения скольжения в точности уравновешивает скатывающую силу, поэтому он либо покоится, либо едет с постоянной скоростью. У верхнего $\mu_1 < \operatorname{tg}\alpha$: он всегда разгоняется с одним и тем же ускорением. Верхний догоняет нижний,

при упругом ударе одинаковых тел скорости меняются местами — и всё повторяется с ростом скоростей. Законы: второй закон Ньютона для каждого бруска, законы сохранения импульса и энергии при ударе.

Обозначения. Ось x вдоль склона вниз, y — перпендикулярно склону; m — масса бруска; a_1, a_2 — ускорения; $t_1, t_2, \ldots$ — моменты столкновений.

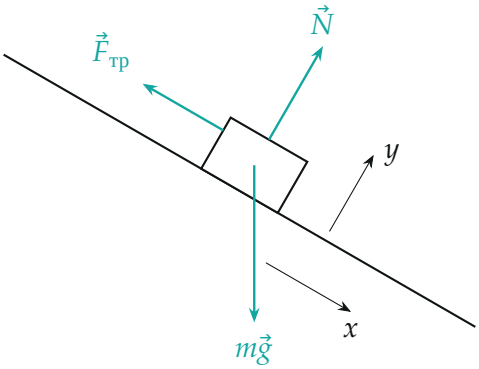


Рис. 2. Силы на брусок, скользящий вниз: тяжести, реакции опоры и трения (против скорости)

1. Ускорения. Второй закон Ньютона для бруска, скользящего вниз:

$$y: \quad N - mg\cos\alpha = 0 \quad \Rightarrow \quad N = mg\cos\alpha,$$
$$x: \quad ma = mg\sin\alpha - \mu N \quad \Rightarrow \quad a = g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha).$$

Для верхнего: $a_1 = 10\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 10\cdot\frac{1}{4} = 2{,}5$ м/с^2 $= g/4$. Для нижнего: $\mu_2\cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2} = \sin\alpha$, так что $a_2 = 0$. В покое нижнему достаточно силы трения покоя $mg\sin\alpha$, а она не превышает $\mu_2 N$ — он стоит, пока его не ударят.

2. Удар. Бруски одинаковые, удар упругий и короткий (силы трения за время удара не успевают изменить импульс). Законы сохранения импульса и кинетической энергии:

$$mu_1 + mu_2 = mu_1' + mu_2', \qquad u_1^2 + u_2^2 = u_1'^2 + u_2'^2.$$

Нетривиальное решение: $u_1' = u_2$, $u_2' = u_1$ — бруски обмениваются скоростями.

3. Первое столкновение. Верхний разгоняется из покоя, нижний стоит; верхний проходит L:

$$\frac{a_1 t_1^2}{2} = L \quad \Rightarrow \quad t_1 = \sqrt{\frac{2L}{a_1}} = \sqrt{\frac{8L}{g}} = \sqrt{\frac{8 \cdot 0{,}1}{10}}\ \text{с} \approx 0{,}283\ \text{с}.$$

Скорость верхнего перед ударом $u = a_1 t_1 = \sqrt{2a_1 L} = \sqrt{0{,}5} \approx 0{,}71$ м/с. После удара верхний стоит, нижний едет с u.

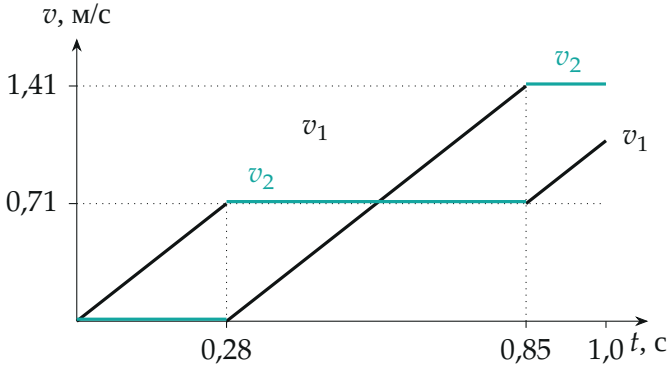


Рис. 3. Скорости брусков в первую секунду: v_1 — чёрным (наклонные отрезки, ускорение $g/4$), v_2 — бирюзой (горизонтальные отрезки). В моменты ударов 0,28 и 0,85 с скорости меняются местами

4. Следующие столкновения. После k-го удара пусть верхний имеет скорость w, нижний — $w + u$ (после первого $w = 0$). Расстояние между ними (нижний минус верхний) через время τ:

$$s(\tau) = (w+u)\tau - \left(w\tau + \frac{a_1\tau^2}{2}\right) = u\tau - \frac{a_1\tau^2}{2}.$$

Оно обращается в ноль при $\tau = 2u/a_1 = 2t_1$. В этот момент скорость верхнего $w + a_1 \cdot 2t_1 = w + 2u$, нижнего $w + u$; после обмена верхний имеет $w + u$, нижний — $w + 2u$: снова «нижний быстрее на u». Значит,

промежуток между ударами всегда $2t_1$:

$$t_k = t_1 + 2t_1(k-1) = (2k-1)\sqrt{\frac{8L}{g}},$$
$$t_1 \approx 0{,}28\text{ с}, \quad t_2 \approx 0{,}85\text{ с}, \quad t_3 \approx 1{,}41\text{ с}.$$

В первую секунду — два столкновения.

Пункт 4b. 5. Путь верхнего бруска. До первого удара верхний проходит L. Между $(k-1)$-м и k-м ударом ($k \geq 2$) он стартует со скоростью $(k-2)u$ (после первого удара 0, после второго u, …) и едет время $2t_1$ с ускорением a_1:

$$\Delta S_k = (k-2)u \cdot 2t_1 + \frac{a_1(2t_1)^2}{2} = 4L\,(k-2) + 4L = 4L\,(k-1),$$

поскольку $ut_1 = a_1 t_1^2 = 2L$. Суммируем:

$$S_n = L + 4L\sum_{k=2}^{n}(k-1) = L + 4L \cdot \frac{n(n-1)}{2} = L\,(2n^2 - 2n + 1).$$

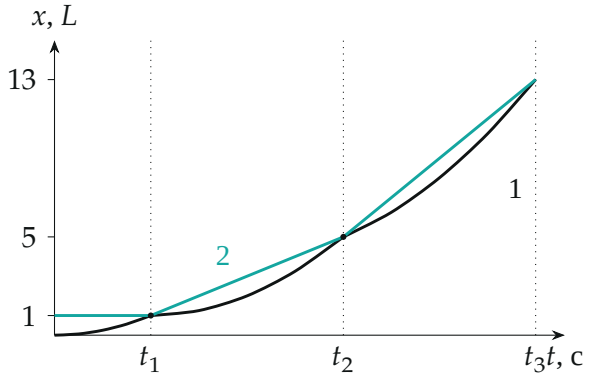


Рис. 4. Координаты брусков (в единицах L, от начального положения верхнего): верхний (чёрный) — кусочки парабол, нижний (бирюзовый) — ломаная. Встречи — при $x = L,\ 5L,\ 13L$, как дают формула S_n для $n = 1, 2, 3$

Обратите внимание. Нижний брусок никогда не тормозится и не разгоняется сам: при $\mu_2 = \operatorname{tg}\alpha$ его скорость меняется только при ударах. Поэтому «зазор» скоростей u после каждого удара один и тот же, и удары идут через равные промежутки $2t_1$.

Проверка. $n = 1$: $S_1 = L$ — верно. $n = 2$: $S_2 = 5L$; напрямую — верхний за $2t_1$ из покоя проходит $a_1(2t_1)^2/2 = 4L$, итого $5L$. Размерность $\sqrt{L/g}$ — секунды. Численно (python): моделирование движения с шагом 10^{-5} с дало удары при 0,283; 0,849; 1,414 с и пути L, $5L$, $13L$, $25L$.

Смысл: удары следуют через равные промежутки, а путь растёт как n^2 — система в целом равноускоренная: средняя скорость пары растёт со временем линейно.

Ответ. 4a) v_1: рост $0 \to 0{,}71$ м/с за 0,28 с, скачок до 0, рост до 1,41 м/с к 0,85 с, скачок до 0,71, рост до 1,09 м/с к $t = 1$ с; v_2: 0 до 0,28 с, 0,71 м/с до 0,85 с, затем 1,41 м/с (рис. 3). Столкновения: $t_k = (2k-1)\sqrt{8L/g}$, в первую секунду — $t_1 \approx 0{,}28$ с и $t_2 \approx 0{,}85$ с; 4b) $S_n = L\,(2n^2 - 2n + 1)$.