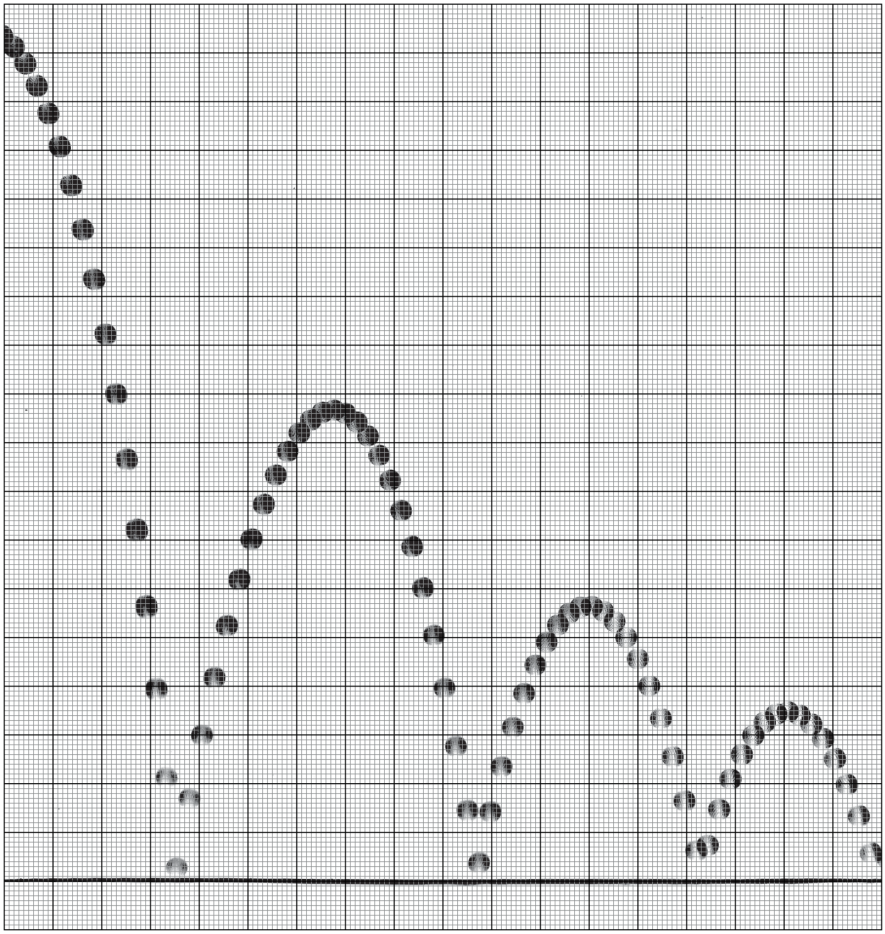
Определите по фотографии

Задача 5. [МОШ 2022/23, 9 класс, задача 5] На стробоскопической фотографии (см. рисунок) можно видеть положение движущегося в поле тяжести земли мяча, сталкивающегося с горизонтальной поверхностью, в разные моменты времени. Промежутки времени между двумя последовательными вспышками стробоскопической лампы одинаковы. Фотография инвертирована (чёрный цвет изменён на белый, белый заменён на чёрный), сетка наложена в графическом редакторе позже для удобства расчётов. Столкновения мяча с горизонтальной поверхностью нельзя считать упругими, в процессе столкновения кинетическая энергия поступательного движения мяча уменьшается.



5a. Далее везде в этой задаче мы предполагаем, что сила сопротивления воздуха пренебрежимо мала. Изучив фотографию, кратко объясните, насколько справедливо наше предположение?

5b. Найдите отношение $\frac{v_1}{v_3}$, где v_1 и v_3 — скорости мяча в наивысшей точке траектории после первого и третьего ударов о поверхность соответственно.

5c. Определите как можно точнее угол между скоростью мяча сразу после первого столкновения и горизонтом.

5d. Во сколько раз изменяется кинетическая энергия мяча в процессе второго столкновения с поверхностью?

▲ **Решение. Что происходит.** Между ударами мяч летит как тело, брошенное под углом к горизонту: по горизонтали — равномерно, по вертикали — с ускорением g. Стробоскоп отмечает положения через равные промежутки τ, поэтому скорость по горизонтали — это шаг между соседними изображениями по горизонтали, а $g\tau^2$ — прирост вертикального шага от вспышки к вспышке. Траектория каждого полёта — парабола; по её высоте и ширине находятся и угол вылета, и энергия. Это задача на обработку данных: координаты центров мяча мы сняли с фотографии (центры тяжести тёмных пятен, программой на python) и подогнали параболами.

Обозначения. Единица длины — крупная клетка сетки a; x — вправо, y — вверх от поверхности; τ — промежуток между вспышками; удары: первый при $x \approx 3{,}6$, второй при $x \approx 9{,}75$, третий при $x \approx 14{,}3$; h_k и D_k — высота подъёма центра мяча и ширина k-й дуги (после k-го удара), u_k — горизонтальная скорость на ней.

Пункт 5а. 1. Проверка модели. Вертикальные шаги на спуске до первого удара: 0,55; 0,69; 0,80; 0,90; 1,02; 1,14; 1,22; 1,34; 1,47; 1,56; 1,68 — растут на одну и ту же величину $g\tau^2 \approx 0{,}113a$ (разброс — точность чтения), на подъёме и спуске первой дуги — тоже $0{,}11a$: вертикальное движение равноускоренное с одним и тем же ускорением вверх и вниз. Горизонтальный шаг на дуге почти постоянен: на подъёме первой дуги $0{,}255a$, на спуске $0{,}225a$. Сопротивление воздуха видно (горизонтальная скорость за полёт падает примерно на 10 %), но мало: параболы ложатся на точки с отклонением около $0{,}1a$ (рис. 2). Для оценок с точностью ~ 10 % предположение справедливо.

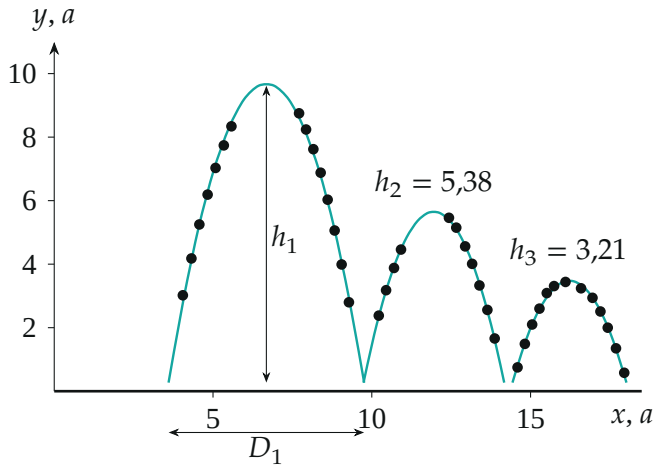


Рис. 2. Центры изображений мяча, снятые с фотографии (точки; слипшиеся у вершин изображения не брались), и параболы, подогнанные к ним. Ширина дуг на высоте центра в момент удара (0,27a): $D_1 = 6{,}15a$, $D_2 = 4{,}43a$, $D_3 = 3{,}59a$; высоты подъёма $h_1 = 9{,}41a$, $h_2 = 5{,}38a$, $h_3 = 3{,}21a$

2. Что даёт парабола. Для полёта с горизонтальной скоростью u и вертикальной w_0 после удара: время подъёма w_0/g, высота $h = w_0^2/(2g)$, ширина дуги $D = 2u\,w_0/g$. Отсюда

$$\frac{w_0}{u} = \frac{4h}{D}, \qquad u^2 = \frac{gD^2}{8h}.$$

Формы парабол $y = h - \dfrac{g}{2u^2}(x - x_0)^2$ одинаковы, если одинакова u: коэффициент при x^2 равен $g/(2u^2)$.

Пункт 5b. 3. Отношение скоростей в верхних точках. В наивысшей точке скорость горизонтальна и равна u_k. Коэффициенты парабол первой и третьей дуг по подгонке 0,994 и 0,996 (на a^{-1}), значит

$$\frac{v_1}{v_3} = \frac{u_1}{u_3} = \sqrt{\frac{0{,}996}{0{,}994}} \approx 1{,}00.$$

То же по шагам между вспышками: $u_1\tau \approx u_3\tau \approx 0{,}238a$. Удар меняет почти только вертикальную скорость.

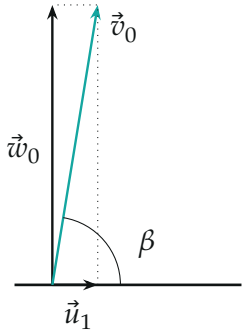


Рис. 3. Скорость сразу после первого удара: горизонтальная u_1 и вертикальная w_0, $w_0/u_1 = 4h_1/D_1 \approx 6{,}1$

Пункт 5c. 4. Угол после первого удара. По п. 2 для первой дуги

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{w_0}{u_1} = \frac{4h_1}{D_1} = \frac{4\cdot 9{,}41}{6{,}15} \approx 6{,}1, \qquad \beta \approx 81^\circ.$$

Второй способ — через вспышки: $w_0\tau = \sqrt{2g\tau^2 h_1} = \sqrt{2\cdot 0{,}113\cdot 9{,}41}\,a = 1{,}46a$, $u_1\tau = 0{,}238a$, отношение 6,1 — то же. Погрешность: h_1 и D_1 известны с точностью $\approx 0{,}1a$, а сопротивление воздуха меняет u на $\sim 10\,\%$, так что $\operatorname{tg}\beta = 6{,}1 \pm 0{,}6$, $\beta = 81^\circ \pm 1^\circ$.

Пункт 5d. 5. Энергия при втором ударе. До второго удара скорость мяча (в той же точке, что сразу после первого, по сохранению энергии в полёте) $v^2 = u_1^2 + 2gh_1$, после удара $u_2^2 + 2gh_2$. С $u^2 = gD^2/(8h)$:

$$\frac{E_{\text{после}}}{E_{\text{до}}} = \frac{D_2^2/(8h_2) + 2h_2}{D_1^2/(8h_1) + 2h_1} = \frac{0{,}46 + 10{,}76}{0{,}50 + 18{,}82} \approx 0{,}58.$$

Горизонтальная часть энергии мала (2–4 %), поэтому ответ почти равен $h_2/h_1 = 0{,}57$.

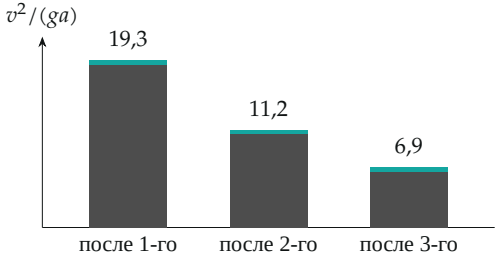


Рис. 4. Квадрат скорости сразу после ударов: $2gh$ (серый) плюс горизонтальная часть u^2 (бирюзовая полоска). Каждый удар забирает около 40 % энергии

Обратите внимание. Вершины дуг на фотографии слиплись, поэтому высоты надёжнее брать из параболы, подогнанной по отдельным изображениям, а не по самой верхней кляксе. Высоты отсчитываются по центру мяча: в момент удара центр на радиус $(0{,}27a)$ выше поверхности.

Проверка. Третий удар: $6{,}92/11{,}22 = 0{,}62$ — почти столько же, сколько второй (0,58): мяч теряет одну и ту же долю энергии, как и должно быть при неизменном коэффициенте восстановления. Размерности: $4h/D$ — безразмерно, отношение энергий — тоже.

Смысл: удар о пол почти не трогает горизонтальную скорость и забирает около 40 % кинетической энергии. У организаторов в ответе 5d $0{,}75 \pm 0{,}15$ — это отношение *скоростей* $\sqrt{0{,}58} = 0{,}76$, а отношение энергий равно 0,58.

Ответ. 5a) вертикальное ускорение постоянно ($g\tau^2 \approx 0{,}11a$ на всех участках), горизонтальная скорость за полёт падает лишь на $\approx 10\,\%$ — сопротивлением можно пренебречь с точностью $\sim 10\,\%$; 5b) $v_1/v_3 \approx 1{,}0$; 5c) $\beta = \operatorname{arctg}(4h_1/D_1) \approx 81^\circ$; 5d) кинетическая энергия уменьшается до $0{,}58 \pm 0{,}06$ прежней (скорость — до 0,76).