Удлиняется и поворачивается

Задача 1. [МОШ 2023/24, отборочный этап, 11 класс, задача 1] Материальная точка движется так, что модуль её радиус-вектора $r(t)$ и угол $\varphi(t)$ между осью $0x$ и радиус-вектором связаны соотношением

$$r(t) \cdot \varphi(t) = \text{const}.$$

В нулевой момент времени $r(0) = 2$ м, $\varphi(0) = \dfrac{\pi}{2}$. Радиальная компонента скорости точки в процессе движения не меняется: $v_r = 1$ м/с.

1. Через какое время после начала движения радиус-вектор повернётся на угол $\dfrac{\pi}{6}$ относительно начального положения? Ответ дайте в секундах, округлите до десятых.
2. Чему равен модуль угловой скорости вращения радиус-вектора в начальный момент времени? Ответ дайте в рад/с, округлите до десятых.

▲ **Решение.** **Что происходит.** Точка удаляется от начала координат O с постоянной радиальной скоростью и при этом поворачивается: чем дальше от O, тем медленнее растёт угол, потому что $r\varphi$ не меняется. Траектория — гиперболическая спираль. Главная идея: $r(t)$ находим из постоянства v_r, затем $\varphi(t)$ — из связи $r\varphi = \text{const}$; угловая скорость — производная φ.

Обозначения. O — начало координат, $r_0 = 2$ м, $\varphi_0 = \pi/2$, $v_r = \dot{r} = 1$ м/с, $\omega = |\dot{\varphi}|$.

1. Закон $r(t)$. Радиальная составляющая скорости — это скорость изменения модуля радиус-вектора, $v_r = \dot{r}$. Она постоянна и положительна (точка удаляется), поэтому

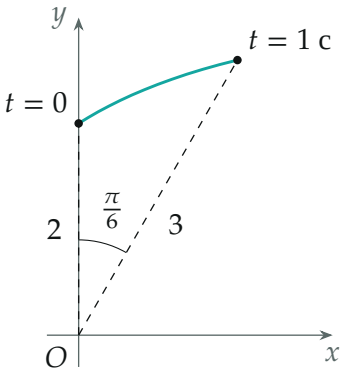
$$r(t) = r_0 + v_r t = (2 + t)\ \text{м} \quad (t \text{ в секундах}).$$

2. Закон $\varphi(t)$. Произведение $r\varphi$ в любой момент равно своему началь-

ному значению:

$$r\varphi = r_0\varphi_0 = 2\cdot\frac{\pi}{2} = \pi \text{ м} \;\Rightarrow\; \varphi(t) = \frac{\pi}{r(t)} = \frac{\pi}{2+t}.$$

Угол убывает: радиус-вектор поворачивается от оси $0y$ к оси $0x$, то есть по часовой стрелке.



Спираль $r\varphi = \pi$: за 1 с радиус-вектор растёт от 2 м до 3 м и поворачивается на $\pi/6$ (длины радиус-векторов подписаны в метрах)

3. Пункт 1. Поворот на $\pi/6$ от начального положения, пока φ убывает, даёт $\varphi_1 = \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\pi}{6} = \dfrac{\pi}{3}$. Подставим в закон $\varphi(t)$:

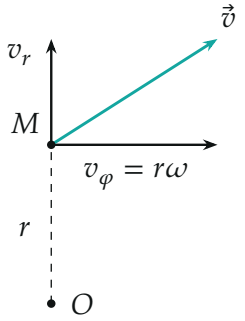
$$\frac{\pi}{2+t_1} = \frac{\pi}{3} \;\Rightarrow\; 2 + t_1 = 3 \;\Rightarrow\; t_1 = 1 \text{ с}.$$

Тот же результат даёт $r_1 = \pi/\varphi_1 = 3$ м: до 3 м радиус-вектор вырастает за $(3-2)/1 = 1$ с.

4. Пункт 2. Угловая скорость — производная угла по времени:

$$\dot\varphi = \frac{d}{dt}\frac{\pi}{2+t} = -\frac{\pi}{(2+t)^2}, \qquad \omega(0) = \frac{\pi}{4} \text{ рад/с} \approx 0{,}79 \text{ рад/с}.$$

Знак минус — вращение по часовой стрелке (угол убывает), модуль $\omega = \pi/4$. Тот же результат даёт дифференцирование связи: из $r\varphi = \text{const}$ следует $\dot r\varphi + r\dot\varphi = 0$, то есть $\dot\varphi = -\dfrac{\varphi\dot r}{r} = -\dfrac{(\pi/2)\cdot 1}{2} = -\dfrac{\pi}{4}$ рад/с.



Скорость точки в начальный момент: радиальная часть $v_r = 1$ м/с и поперечная $v_\varphi = r\omega = \pi/2$ м/с

Проверка. Размерность: $[\pi/r^2 \cdot \dot{r}] = \text{м/с/м}^2 \cdot \text{м} = \text{с}^{-1}$, рад/с — верно. Предел: при $t \to \infty$ $\varphi \to 0$ и $\omega \to 0$ — радиус-вектор стремится к оси $0x$, поворачиваясь всё медленнее. Второй способ для пункта 2: поперечная скорость $v_\varphi = r\omega = 2 \cdot \pi/4 = \pi/2$ м/с, и отношение $v_\varphi/v_r = \pi/2 = \varphi_0$ — именно это следует из $r\varphi = \text{const}$.

Смысл: точка движется по спирали, у которой скорость поворота пропорциональна $1/r^2$.

Ответ. 1) $t = 1{,}0$ с; 2) $\omega = \dfrac{\pi}{4} \approx 0{,}8$ рад/с.