КПД цикла

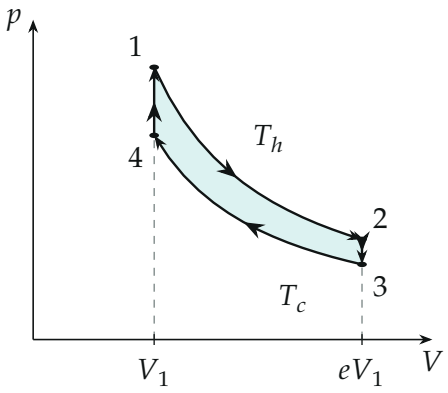
Задача 3. [МОШ 2023/24, отборочный этап, 11 класс, задача 3] С одним молем идеального одноатомного газа проводится циклический процесс, состоящий из двух изотерм и двух изохор. Отношение объёмов на изохорах равно e (e — основание натурального логарифма, $\ln e = 1$). Отношение температур на изотермах равно $\frac{4}{3}$. Определите отношение $k = \frac{\eta}{\eta_0}$ КПД данного цикла к КПД идеальной тепловой машины, работающей по циклу Карно с теми же температурами на изотермах. В ответе на вопрос задачи укажите номер столбца таблицы, в котором стоит значение, наиболее близкое к найденному вами.

№	1	2	3	4	5	6
k	0,45	0,50	0,55	0,60	0,65	0,70

Работа газа в изотермическом процессе при расширении от объёма V_1 до объёма V_2 даётся формулой $A = \nu RT \ln \frac{V_2}{V_1}$, где ν — количество вещества, R — универсальная газовая постоянная, T — температура.

▲ **Решение. Что происходит.** Это тепловая машина без регенератора: газ расширяется на горячей изотерме, охлаждается на изохоре, сжимается на холодной изотерме и нагревается на второй изохоре. КПД — работа за цикл, делённая на всё тепло, полученное от нагревателя. Главная идея: нагреватель отдаёт тепло и на изотерме, и на изохоре нагрева; про вторую часть легко забыть, а у цикла Карно её нет — поэтому КПД меньше.

Обозначения. $T_h = \frac{4}{3} T_c$ — температура горячей изотермы, T_c — холодной; V_1 и $V_2 = eV_1$ — объёмы на изохорах; $\nu = 1$ моль.



Цикл в осях p–V: $1 \to 2$ — расширение на горячей изотерме, $2 \to 3$ — охлаждение при $V = const$, $3 \to 4$ — сжатие на холодной изотерме, $4 \to 1$ — нагрев при $V = const$

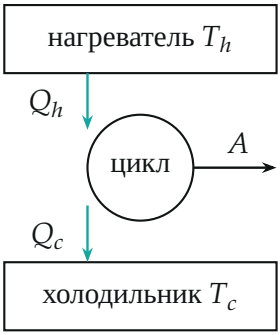
1. Работа за цикл. На изохорах работа равна нулю, на изотермах считаем по формуле из условия, $\ln \dfrac{V_2}{V_1} = \ln e = 1$. На горячей изотерме газ расширяется ($A_{12} = \nu R T_h \cdot 1 > 0$), на холодной — сжимается от V_2 до V_1 ($A_{34} = \nu R T_c \ln \dfrac{V_1}{V_2} = -\nu R T_c$). Полезная работа

$$A = A_{12} + A_{34} = \nu R (T_h - T_c).$$

2. Тепло от нагревателя. Нагреватель отдаёт газу тепло на двух участках цикла.

- На изотерме $1 \to 2$ внутренняя энергия идеального газа не меняется, первое начало даёт $Q_{12} = A_{12} = \nu R T_h$.
- На изохоре $4 \to 1$ газ нагревается от T_c до T_h без работы: $Q_{41} = \Delta U = \frac{3}{2} \nu R (T_h - T_c)$ (одноатомный газ, $C_V = \frac{3}{2} R$). Это тепло тоже берётся у нагревателя, потому что температура газа ниже T_h и источник другой не предусмотрен.

Итого $Q_h = \nu R T_h + \frac{3}{2} \nu R (T_h - T_c)$.



Тепловая машина: Q_h — тепло, взятое у нагревателя на двух участках ($1 \to 2$ и $4 \to 1$), A — работа за цикл, Q_c — тепло, отданное холодильнику

3. КПД цикла. Подставим $T_h = \frac{4}{3}T_c$ (тогда $T_h - T_c = \frac{1}{3}T_c$):

$$\eta = \frac{A}{Q_h} = \frac{T_h - T_c}{T_h + \frac{3}{2}(T_h - T_c)} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{4}{3} + \frac{1}{2}} = \frac{1/3}{11/6} = \frac{2}{11} \approx 0{,}182.$$

КПД идеальной машины Карно между теми же температурами $\eta_0 = \dfrac{T_h - T_c}{T_h} = \dfrac{1/3}{4/3} = \dfrac{1}{4}$.

4. Отношение.

$$k = \frac{\eta}{\eta_0} = \frac{2/11}{1/4} = \frac{8}{11} \approx 0{,}727.$$

Ближе всего к 0,727 стоит 0,70 (разница 0,027; до 0,65 — 0,077): столбец 6.

Обратите внимание: если бы тепло изохоры нагрева в знаменатель не вошло, получилось бы $k = 1$ — цикл «стал» бы циклом Карно, что неверно: на изохоре газ получает от нагревателя ещё и тепло $\frac{3}{2}\nu R(T_h - T_c)$ при конечной разности температур, и это уже не цикл Карно.

Проверка. Размерность: все слагаемые в Q_h — в джоулях, η безразмерно. Второй способ — через тепло холодильника: $Q_c = \nu R T_c + \frac{3}{2}\nu R(T_h - T_c)$ (изотерма $3 \to 4$ и изохора $2 \to 3$), $A = Q_h - Q_c$ тоже даёт $\nu R(T_h - T_c)$. Предел: при $T_h \to T_c$ добавка $\frac{3}{2}(T_h - T_c)$ в знаменателе мала по сравнению с T_h, $\eta \to \eta_0$ и $k \to 1$ — для узкого

цикла разница между изохорой и «почти изотермой» исчезает.

Смысл: нагрев газа на изохоре идёт за счёт нагревателя при конечной разности температур, и это отнимает у КПД почти треть от идеального значения.

Ответ. $k = \dfrac{8}{11} \approx 0{,}73$; ближе всего значение 0,70 — столбец 6.