Диполь в постоянном поле

Задача 4. [МОШ 2023/24, отборочный этап, 11 класс, задача 4] Два маленьких шарика массой $m = 1$ г, несущие заряды q и $-q$ ($q = 10$ нКл), соединены невесомым стержнем длиной $d = 1$ см. Начало вектора **d** совпадает с отрицательным зарядом, а конец — с положительным. Диполь находится в невесомости, его удерживают в постоянном электрическом поле напряжённостью $E = 10^3$ В/м, так что угол между векторами **d** и **E** равен $\frac{\pi}{2}$.

1. Диполь освобождают. Чему равна максимальная скорость любого из шариков после этого? Ответ дайте в см/с, округлите до целого.
2. Определите период малых колебаний диполя вблизи положения равновесия. Ответ дайте в секундах, округлите до целого.

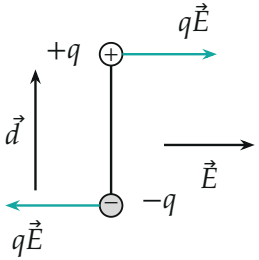


Рисунок условия и силы: $\vec{d} \perp \vec{E}$; на $+q$ действует сила $q\vec{E}$ вдоль поля, на $-q$ — против поля (чёрная стрелка у стержня — вектор $\vec{d}$)

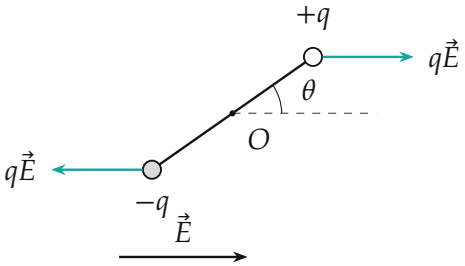
▲ **Решение. Что происходит.** Поле тянет положительный заряд вправо, отрицательный — влево: две равные противоположные силы дают только момент, центр диполя остаётся на месте, а сам диполь поворачивается и «ложится» вдоль поля. Это вращение вокруг центра стержня; потенциальная энергия диполя падает, кинетическая растёт. Главная идея: в п. 1 — закон сохранения энергии, в п. 2 — уравнение вращения, которое для малого угла совпадает с уравнением гармонических колебаний.

Обозначения. θ — угол между $\vec{d}$ и $\vec{E}$; ось $0x$ — вдоль $\vec{E}$; $p = qd$ — модуль дипольного момента; I — момент инерции диполя относительно центра стержня.

1. Энергия диполя в поле. Потенциальная энергия заряда Q в однородном поле: $-QEx$ (начало отсчёта произвольно). Для зарядов q и $-q$ с координатами x_+ и x_-

$$U = -qEx_+ + qEx_- = -qE(x_+ - x_-) = -qEd\cos\theta = -\vec{p}\cdot\vec{E},$$

потому что проекция $\vec{d}$ на $\vec{E}$ равна $d\cos\theta$. При $\theta = \dfrac{\pi}{2}$ энергия $U = 0$, при $\theta = 0$ — минимум $U = -qEd$: равновесие диполя вдоль поля устойчиво.



Диполь под углом θ к полю: силы $q\vec{E}$ создают момент, возвращающий $\vec{d}$ к $\vec{E}$; O — центр стержня

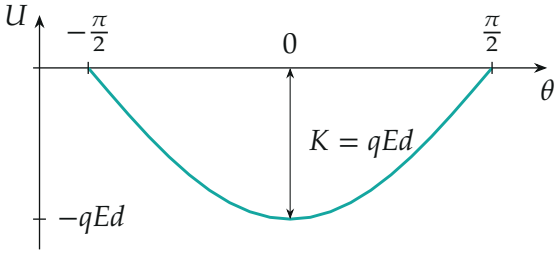
2. Пункт 1: максимальная скорость. Сила, действующая на диполь целиком, равна нулю ($qE - qE = 0$), поэтому центр диполя неподвижен, а шарики движутся по окружности радиуса $d/2$ с одинаковыми скоростями v. Диполь стартует из покоя при $\theta = \pi/2$, $U = 0$; скорость максимальна там, где U минимальна, то есть при $\theta = 0$. Закон сохранения энергии для системы двух шариков и поля между этими положениями:

$$0 = 2\cdot\frac{mv^2}{2} + (-qEd) \;\Rightarrow\; v = \sqrt{\frac{qEd}{m}}.$$

Подставим числа (СИ): $v = \sqrt{\dfrac{10^{-8}\cdot 10^{3}\cdot 10^{-2}}{10^{-3}}} = 10^{-2}$ м/с $= 1$ см/с.

Применимость: невесомость и невесомый стержень — силы тяжести и

массы стержня нет, поэтому вся убыль U идёт в кинетическую энергию шариков.



Потенциальная энергия $U(\theta) = -qEd\cos\theta$. Диполь стартует с $\theta = \pi/2$ ($U = 0$), в положении равновесия $\theta = 0$ вся убыль энергии qEd стала кинетической (K)

3. Пункт 2: уравнение вращения. Рассмотрим диполь при малом угле θ. Основное уравнение вращения вокруг центра: момент сил $M = I\ddot{\theta}$. Силы qE на обоих зарядах дают одинаковые моменты, плечо каждой — $\dfrac{d}{2}\sin\theta$, и момент направлен так, чтобы уменьшить θ:

$$I\ddot{\theta} = -2\cdot qE\cdot\frac{d}{2}\sin\theta = -qEd\sin\theta \approx -qEd\,\theta.$$

Момент инерции двух шариков на расстоянии $d/2$ от оси: $I = 2m\left(\dfrac{d}{2}\right)^2 = \dfrac{md^2}{2}$. Тогда

$$\ddot{\theta} = -\frac{2qE}{md}\,\theta,$$

это уравнение гармонических колебаний $\ddot{\theta} = -\omega^2\theta$ с

$$\omega^2 = \frac{2qE}{md} = \frac{2\cdot 10^{-8}\cdot 10^{3}}{10^{-3}\cdot 10^{-2}} = 2\ \text{с}^{-2}, \qquad T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{2}} = \pi\sqrt{2} \approx 4{,}4\ \text{с}.$$

Округляя, $T \approx 4$ с.

Обратите внимание: формула $\sin\theta \approx \theta$ годится только для малых колебаний. Движение в п. 1 из $\theta = \pi/2$ — большая амплитуда, его период другой (больше 4,4 с), но на пункты это не влияет.

Проверка. Второй способ для ω: при малых θ $U \approx -qEd + \frac{1}{2}qEd\,\theta^2$, кинетическая энергия $K = 2\cdot\frac{1}{2}m\left(\frac{d}{2}\dot\theta\right)^2 = \frac{md^2}{4}\dot\theta^2$; приравняв коэффициенты, получаем $\omega^2 = \dfrac{qEd}{md^2/2}$, то есть те же $\dfrac{2qE}{md}$. Размерность: $qE/(md) = \dfrac{\text{Н}}{\text{кг}\cdot\text{м}} = \text{с}^{-2}$. Согласование: при амплитуде θ_0 скорость в равновесии $v = \omega\dfrac{d}{2}\theta_0$, а при $\theta_0 = \pi/2$ линейная оценка даёт $v = \sqrt{2}\cdot 0{,}5\cdot\pi/2 \approx 1{,}1$ см/с — близко к точным 1 см/с.

Смысл: диполь в поле ведёт себя как маятник с возвращающим моментом $pE\sin\theta$.

Ответ. 1) $v = \sqrt{qEd/m} = 1$ см/с; 2) $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{md}{2qE}} \approx 4$ с.