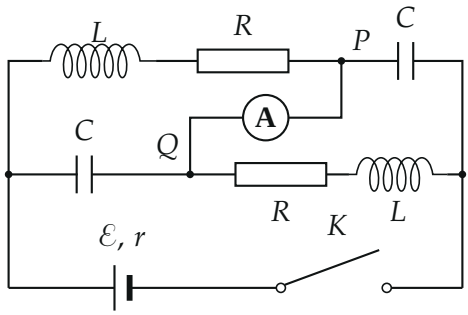
RLC-цепь

Задача 5. [МОШ 2023/24, отборочный этап, 11 класс, задача 5] В цепи, представленной на рисунке ниже, сопротивление резисторов, внутреннее сопротивление батареи, индуктивность катушки и ёмкость конденсатора равны $R = 100$ Ом, $r = 1$ Ом, $L = 0{,}1$ Гн и $C = 0{,}1$ мкФ соответственно, амперметр идеальный. Цепь подключена к батарее с ЭДС $\mathcal{E} = 4$ В через ключ K. Сначала ключ разомкнут.



1. Ключ замыкают. Найдите показания амперметра сразу после замыкания ключа. Ответ дайте в амперах, округлите до целого.
2. После замыкания ключа ожидают достаточно большое время, так что в цепи устанавливается стационарный режим. Что показывает амперметр в стационарном режиме? Ответ дайте в миллиамперах, округлите до целого.
3. После установления стационарного режима ключ размыкают. Какое количество теплоты выделяется на резисторах (суммарно на двух) за большое время после размыкания ключа? Ответ дайте в мкДж, округлите до целого.

▲ **Решение. Что происходит.** Это цепь с катушками и конденсаторами, поэтому ток и напряжения меняются во времени, но в три выделенных момента схему можно заменить простой. Сразу после замыкания ключа ток через катушку ещё нулевой (катушка тормозит изменение тока), а конденсатор не заряжен (напряжение на нём нулевое): катушка — разрыв, конденсатор — проводник. В стационарном режиме наоборот: ток

через конденсатор нулевой (разрыв), а напряжение на катушке нулевое (проводник). После размыкания источник отключён, и вся энергия катушек и конденсаторов превращается в тепло на резисторах.

Обозначения. a и b — левый и правый узлы с батареей (на схеме — точки на боковых рейках); P и Q — узлы, между которыми включён амперметр. Идеальный амперметр имеет нулевое сопротивление, поэтому потенциалы P и Q одинаковы: $\varphi_P = \varphi_Q$.

1. Пункт 1: момент замыкания. Ток через обе катушки равен нулю, напряжения на конденсаторах равны нулю. Верхняя ветка $a \to P$ (катушка L, резистор R) обесточена. Средний конденсатор C между a и Q — проводник, поэтому $\varphi_Q = \varphi_a$; верхний конденсатор между P и b — тоже проводник, $\varphi_b = \varphi_P$. С учётом $\varphi_P = \varphi_Q$ потенциалы a и b совпадают: батарея замкнута накоротко, её сопротивление — только r:

$$I_0 = \frac{\mathcal{E}}{r} = \frac{4}{1} = 4\ \text{А}.$$

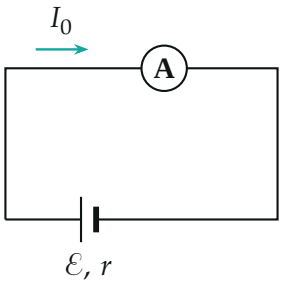


Схема в момент замыкания: катушки с резисторами исключены (разрыв), конденсаторы заменены проводниками, и амперметр включён в цепь батареи; $I_0 = \mathcal{E}/r$

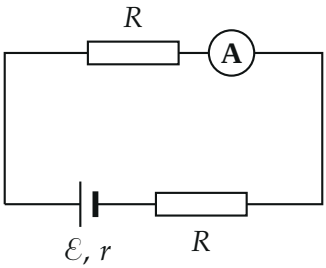
Обратите внимание: резисторы R тока не получают, поэтому 100 Ом в ответ не входят — амперметр в этот момент показывает ток короткого замыкания батареи.

2. Пункт 2: стационарный режим. Токи постоянны: на катушках напряжения нет, конденсаторы ток не пропускают. Пути тока остаются

такие: $a \to L \to R \to P \to$ амперметр $\to Q \to R \to L \to b$. Конденсаторы в ветвях, идущих от a к Q и от P к b, тока не дают. Получаем последовательную цепь r, R, амперметр, R:

$$I = \frac{\mathcal{E}}{r + 2R} = \frac{4}{201}\ \text{А} \approx 19{,}9\ \text{мА} \approx 20\ \text{мА}.$$

Через амперметр идёт весь этот ток — он соединяет две части последовательной цепи.



Стационарный режим: катушки — провода, конденсаторы убраны; последовательная цепь r, R, R, амперметр

3. Пункт 3: энергия, запасённая к моменту размыкания. После размыкания ключа источник и r отключены, в цепи остаются два резистора R, катушки и конденсаторы. Резисторы — единственные элементы, где энергия рассеивается, поэтому за большое время всё запасённое выделится на них (токи и напряжения затухнут, конденсаторы разрядятся: напряжение вокруг любого контура без источника сводится к нулю). Найдём запас энергии в момент размыкания.

- Катушки: через каждую идёт ток I, энергия одной $\dfrac{LI^2}{2}$.
- Конденсаторы: по потенциалам в стационарном режиме $\varphi_a - \varphi_Q = \varphi_a - \varphi_P = IR$ (падение на верхнем резисторе, катушка напряжения не даёт) и $\varphi_Q - \varphi_b = IR$ (падение на среднем резисторе). Значит, напряжение на каждом конденсаторе $U_C = IR$, энергия одного $\dfrac{CU_C^2}{2} = \dfrac{C(IR)^2}{2}$.

Полное количество теплоты

$$W = 2 \cdot \frac{LI^2}{2} + 2 \cdot \frac{C(IR)^2}{2} = I^2\left(L + CR^2\right).$$

Подставим числа: $CR^2 = 10^{-7} \cdot 10^4 = 10^{-3}$ Гн (размерность Ф $\cdot$ Ом^2 = Гн), $L + CR^2 = 0{,}101$ Гн, $I^2 = \left(\dfrac{4}{201}\right)^2 \approx 3{,}96 \cdot 10^{-4}$ А^2:

$$W \approx 3{,}96 \cdot 10^{-4} \cdot 0{,}101 \approx 4{,}0 \cdot 10^{-5}\ \text{Дж} = 40\ \text{мкДж}.$$

Из них 39,6 мкДж — энергия катушек и 0,4 мкДж — конденсаторов.

Проверка. Размерность: LI^2 и $C(IR)^2$ — джоули. Для пункта 2 предел: при $r \to 0$ ток $\mathcal{E}/2R = 20$ мА, почти тот же, поскольку $r \ll R$. Для пункта 1: ток 4 А ограничен только r (в 200 раз больше стационарного тока), как у короткого замыкания; для пункта 3 — энергия катушек гораздо больше энергии конденсаторов, потому что $L \gg CR^2$.

Смысл: схема «запоминает» энергию магнитного поля в катушках, и при отключении источника она выделяется на резисторах.

Ответ. 1) 4 А; 2) 20 мА; 3) 40 мкДж.