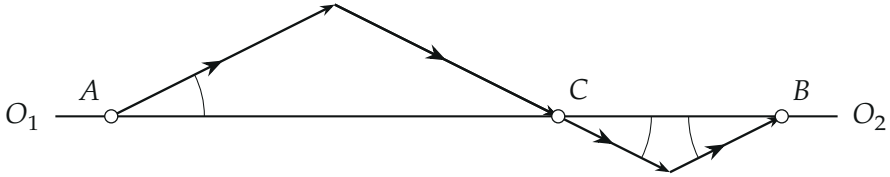
Через две линзы

Задача 6. [МОШ 2023/24, отборочный этап, 11 класс, задача 6] Две тонкие линзы располагаются так, что их оптические оси совпадают. Прямая O_1O_2 на рисунке, представленном ниже, — это общая оптическая ось этих двух линз. Небольшой предмет располагается в точке A, лежащей на оси O_1O_2. На рисунке показан ход одного из лучей, идущего от предмета. Линзы на рисунке не показаны. Углы, образованные отрезками луча и осью, равны. При этом известно, что $AC = 24$ см, $BC = 12$ см.



Ход луча из условия: $AC = 24$ см, $BC = 12$ см; все три угла между отрезками луча и осью равны α

1. Найдите фокусное расстояние линзы меньшей оптической силы. Ответ дайте в сантиметрах, округлите до целого.
2. Найдите фокусное расстояние линзы большей оптической силы. Ответ дайте в сантиметрах, округлите до целого.
3. Определите поперечное увеличение, с которым изображается в этой системе линз небольшой предмет, располагающийся в точке A. Ответ округлите до десятых.

▲ **Решение. Что происходит.** Вне линз луч идёт по прямой, а в тонкой линзе он преломляется — ломается в плоскости линзы. Значит, линзы стоят в двух изломах луча. Преломлённый первой линзой луч приходит в точку C оси: это изображение точки A (лучи от A после линзы собираются в одной точке, а один из них лежит на оси). Для второй линзы C — предмет, а точка B — его изображение. Главная идея: положения линз найдём из равнобедренных треугольников, а фокусные расстояния — по формуле тонкой линзы.

Обозначения. K_1, K_2 — изломы луча (положения линз L_1, L_2 в проекции на ось), a_1, b_1 — расстояния от первой линзы до предмета A и до

изображения C, a_2, b_2 — от второй линзы до C и до B; f_1, f_2 — фокусные расстояния, Γ_1, Γ_2 — увеличения линз.

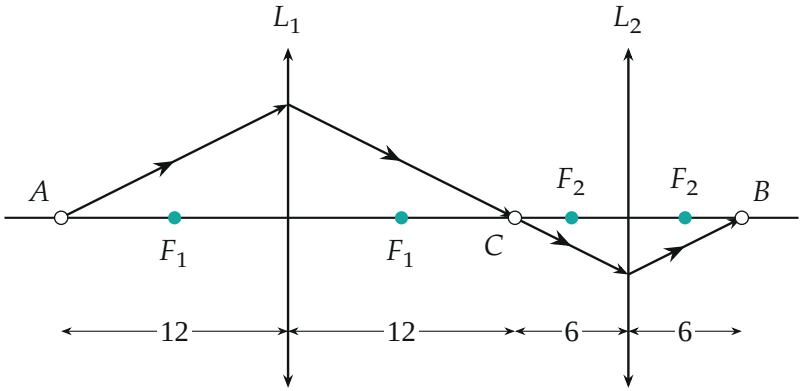
1. Первая линза. В треугольнике AK_1C углы при вершинах A и C равны α, поэтому он равнобедренный: K_1 лежит над серединой AC. Плоскость линзы перпендикулярна оси и проходит через K_1, значит, она отстоит от A на 12 см:

$$a_1 = \frac{AC}{2} = 12 \text{ см}, \qquad b_1 = \frac{AC}{2} = 12 \text{ см}.$$

2. Вторая линза. Аналогично в треугольнике CK_2B углы при C и B равны α, K_2 лежит под серединой CB:

$$a_2 = \frac{CB}{2} = 6 \text{ см}, \qquad b_2 = \frac{CB}{2} = 6 \text{ см}.$$

Расстояния считаем вдоль оси до плоскости линзы, а не вдоль луча.



Линзы L_1 и L_2 стоят в изломах луча; расстояния в сантиметрах; фокусы F_1 (6 см от L_1) и F_2 (3 см от L_2)

3. Фокусные расстояния. Формула тонкой линзы $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f}$ для действительного предмета и действительного изображения. Для первой линзы $\frac{1}{f_1} = \frac{1}{12} + \frac{1}{12} = \frac{1}{6}$, для второй $\frac{1}{f_2} = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$:

$$f_1 = 6 \text{ см}, \qquad f_2 = 3 \text{ см}.$$

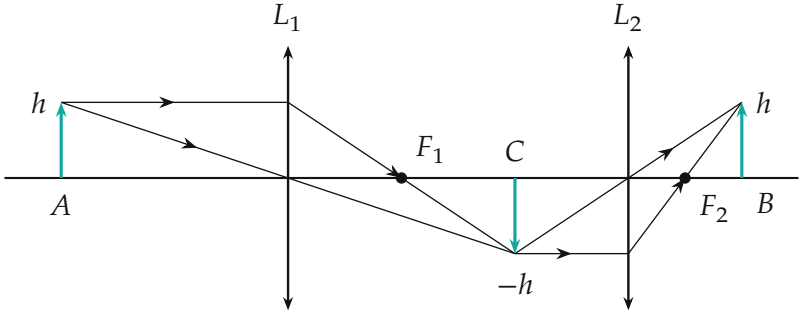
Оптическая сила обратна фокусному расстоянию, поэтому линза меньшей оптической силы — первая, $f_1 = 6$ см (пункт 1); большей — вторая, $f_2 = 3$ см (пункт 2).

4. Увеличение. Для линзы поперечное увеличение $\Gamma = -\dfrac{b}{a}$ (знак минус — перевёрнутое изображение). Первая линза даёт изображение в C, вторая — в B:

$$\Gamma_1 = -\frac{12}{12} = -1, \qquad \Gamma_2 = -\frac{6}{6} = -1, \qquad \Gamma = \Gamma_1\Gamma_2 = 1{,}0.$$

Изображение прямое и такого же размера, как предмет.

5. Построение изображения. Проверим знак увеличения построением. Предмет — стрелка высотой h в точке A. Луч от её конца параллельно оси после L_1 идёт через задний фокус F_1, луч через центр L_1 не преломляется; они пересекаются над точкой C на высоте $-h$ — изображение перевёрнуто. Для L_2 это изображение — предмет: такие же два луча сходятся над B на высоте $+h$.



Построение изображения стрелки A: первая линза переворачивает её в C, вторая — обратно в B; $\Gamma = (-1)(-1) = 1$

Обратите внимание: изображение C первой линзы — предмет для второй, и его размер уже учтён в Γ_1; общее увеличение — произведение увеличений.

Проверка. Лучевая проверка преломления: луч с наклоном $\tan\theta$ на линзе на высоте h получает наклон $\tan\theta - h/f$. Пусть $t = \tan\alpha$. На L_1: высота $h = 12t$, наклон до линзы $+t$; после $t - 12t/6 = -t$ — луч идёт

вниз под тем же α, как на рисунке. На L_2: $h = -6t$, наклон $-t$; после $-t-(-6t)/3 = +t$ — луч идёт вверх к B. Размерность: $f = ab/(a+b)$ — см.

Смысл: две линзы последовательно составляют систему, которая переносит изображение в ту же сторону и в том же размере.

Ответ. 1) $f = 6$ см; 2) $f = 3$ см; 3) $\Gamma = 1{,}0$.