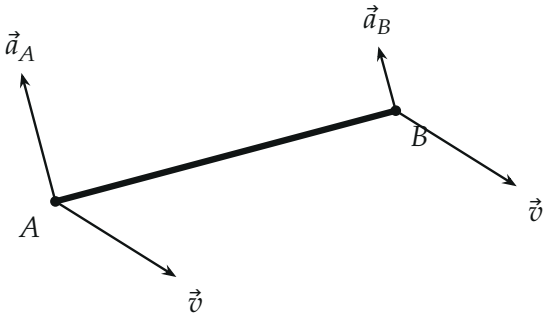
Стержень на плоскости

Задача 1. [МОШ 2023/24, 10 класс, задача 1] Однородный стержень массой m движется по плоскости так, что в некоторый момент времени абсолютные значения ускорений концов A и B стержня оказываются равны $a_A = 2a_0$ и $a_B = a_0$, при этом ускорения направлены вдоль параллельных прямых, а векторы скоростей концов равны друг другу. Какая внешняя сила действует на стержень в данный момент времени? Определите модуль и направление вектора силы.



Поясняющий рисунок: скорости концов стержня одинаковы, ускорения параллельны (их направления пока неизвестны — найдём ниже; здесь показан один из двух возможных случаев).

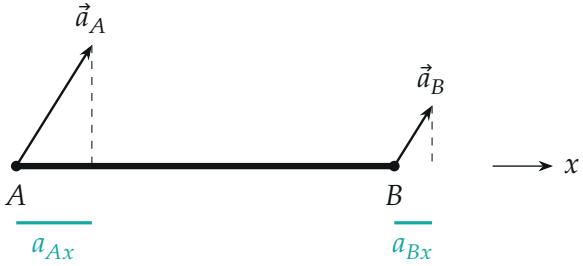
▲ **Решение.** **Что происходит.** Это задача на кинематику твёрдого тела и теорему о движении центра масс. Раз скорости всех точек одинаковы, стержень в этот момент не вращается, движется поступательно. Из того, что длина стержня не меняется, следует ограничение на ускорения концов: их проекции на стержень равны. Отсюда ускорения перпендикулярны стержню, ускорения точек меняются вдоль стержня линейно, и ускорение середины — полусумма ускорений концов. Силу даёт второй закон Ньютона для центра масс.

Обозначения. l — длина стержня; ось x — вдоль стержня от A к B, ось y — перпендикулярно; $\vec{a}_C$ — ускорение центра масс C (середины стержня); $\vec{F}$ — равнодействующая внешних сил.

1. Проекции ускорений на стержень. Длина стержня постоянна, поэтому проекции скоростей концов на направление стержня всегда равны (иначе концы сближались бы или удалялись). Сейчас скорости равны, $\vec{v}_A = \vec{v}_B$, стержень не вращается и через малое время Δt имеет почти то же направление. Чтобы проекции скоростей на стержень остались равными и через Δt, приращения скоростей $\vec{a}_A\Delta t$ и $\vec{a}_B\Delta t$ должны иметь равные проекции на стержень:

$$a_{Ax} = a_{Bx}.$$

2. Ускорения перпендикулярны стержню. Векторы $\vec{a}_A$ и $\vec{a}_B$ параллельны, но $|\vec{a}_A| = 2a_0 \neq |\vec{a}_B| = a_0$. Если общее направление ускорений составляет с осью x угол α, то $a_{Ax} = \pm 2a_0 \cos\alpha$, $a_{Bx} = \pm a_0 \cos\alpha$. Эти проекции равны, только если $\cos\alpha = 0$: оба ускорения *перпендикулярны стержню*. При этом $\vec{a}_A$ и $\vec{a}_B$ могут быть направлены в одну сторону или в противоположные.



Если параллельные ускорения разной длины не перпендикулярны стержню, их проекции на стержень (бирюзовые отрезки) различны — стержень растягивался бы. Поэтому возможен только случай $\vec{a}_A, \vec{a}_B \perp AB$.

3. Ускорения точек стержня. Перейдём в инерциальную систему отсчёта, движущуюся со скоростью $\vec{v}$: в ней стержень в данный момент покоится, а ускорения точек те же. Через малое Δt скорости концов станут $\vec{a}_A\Delta t$ и $\vec{a}_B\Delta t$ — перпендикулярны стержню. Это мгновенное вращение вокруг некоторой точки O на прямой AB, и скорости точек пропорциональны расстоянию до O. Значит, и ускорения точек в начальный момент пропорциональны расстоянию до O: они меняются вдоль стержня

линейно, $a_y(x)$ — линейная функция x. Точку O (где ускорение ноль) находим, проводя прямую через концы векторов $\vec{a}_A$ и $\vec{a}_B$ до пересечения с прямой AB.

4. Ускорение центра масс. Для линейной функции значение в середине отрезка — полусумма значений на концах:

$$a_{Cy} = \frac{a_{Ay} + a_{By}}{2}.$$

Направим ось y по $\vec{a}_A$, тогда $a_{Ay} = 2a_0$.

Ускорения в одну сторону: $a_{By} = a_0$,

$$a_{Cy} = \frac{2a_0 + a_0}{2} = \frac{3}{2}a_0;$$

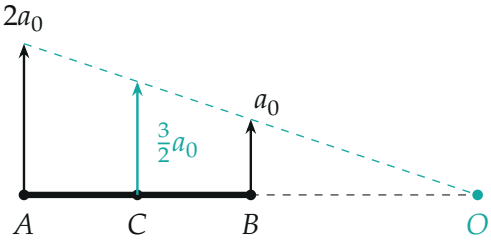
точка O лежит на продолжении стержня за точкой B, на расстоянии l от неё.

Ускорения в разные стороны: $a_{By} = -a_0$,

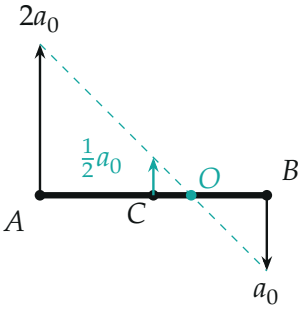
$$a_{Cy} = \frac{2a_0 - a_0}{2} = \frac{1}{2}a_0;$$

точка O лежит на стержне, на расстоянии $\frac{2}{3}l$ от A.

В обоих случаях $a_{Cy} > 0$: ускорение центра масс направлено так же, как $\vec{a}_A$.



в одну сторону



в разные стороны

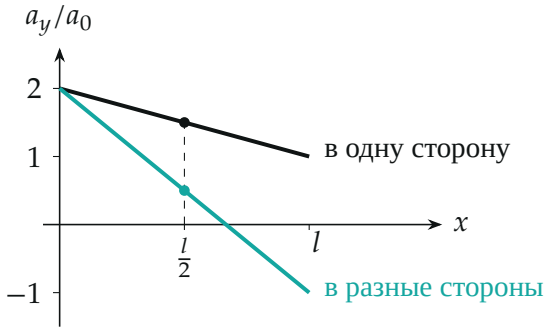
Два возможных случая. Ускорения точек стержня меняются линейно: концы векторов лежат на одной прямой (бирюзовый пунктир), она пересекает прямую AB в точке O с нулевым ускорением. Ускорение центра масс C — полусумма ускорений концов.

5. Сила. Теорема о движении центра масс (второй закон Ньютона для стержня): $\vec{F} = m\vec{a}_C$. Значит,

$$F = \frac{3}{2}\,ma_0 \quad \text{(ускорения концов в одну сторону)},$$

$$F = \frac{1}{2}\,ma_0 \quad \text{(в разные стороны)},$$

и в обоих случаях $\vec{F}$ направлена так же, как $\vec{a}_A$ — перпендикулярно стержню.



Проекция ускорения точки стержня на ось y в зависимости от её положения x (по вычисленным точкам). Точки — ускорение центра масс: $\frac{3}{2}a_0$ и $\frac{1}{2}a_0$.

Обратите внимание. Задача имеет два ответа: условие говорит только, что ускорения направлены вдоль параллельных прямых, но не в одну ли сторону. Отбросить случай противоположных ускорений нельзя — он кинематически возможен. Направление силы в обоих случаях одно — по большему ускорению $\vec{a}_A$.

Проверка. Размерность: $[ma_0] = \text{Н}$. Второй способ для случая «в одну сторону»: $a_y(x) = 2a_0 - a_0x/l$, при $x = l/2$ получаем $\frac{3}{2}a_0$; нуль при $x = 2l$ — точка O за B, как на рисунке. Для «в разные стороны»: $a_y(x) = 2a_0 - 3a_0x/l$, при $x = l/2$ — $\frac{1}{2}a_0$, нуль при $x = \frac{2}{3}l$. Предел: если бы $a_A = a_B$, то поступательное ускорение стержня, $F = ma_A$ — формула полусуммы даёт то же.

Смысл: в момент, когда стержень не вращается, ускорения его точек — как у мгновенно начинающего поворачиваться стержня, и центр масс получает среднее ускорение концов.

Ответ. $F = \frac{3}{2}ma_0$ (ускорения концов в одну сторону) или $F = \frac{1}{2}ma_0$ (в противоположные); в обоих случаях сила направлена так же, как $\vec{a}_A$, перпендикулярно стержню.