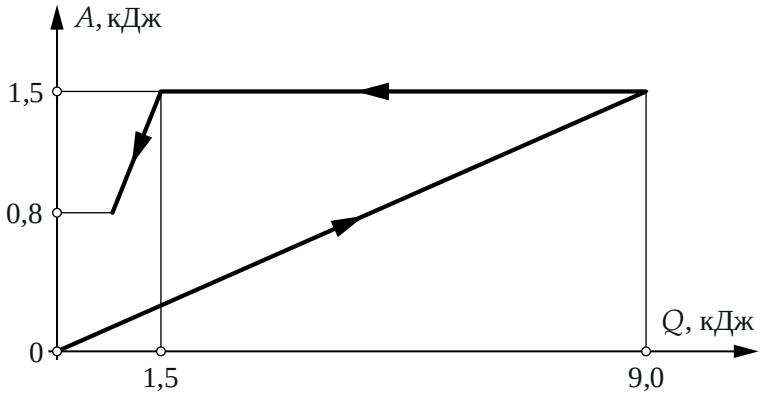
Термодинамический цикл

Задача 2. [МОШ 2023/24, 10 класс, задача 2] Состояние одного моля идеального двухатомного газа изменяется в цикле, состоящем из процессов с постоянной теплоёмкостью. На рисунке, представленном ниже, изображён график зависимости работы, совершаемой газом, от количества теплоты, полученного или отданного им при достижении текущего состояния.

1. Определите КПД цикла.
2. Чему равна минимальная температура газа в этом циклическом процессе, если максимальная температура равна 481 K?



Примечание. Квазистатический процесс, при котором молярная теплоёмкость газа c остаётся постоянной, описывается соотношением

$$PV^{\frac{c-c_P}{c-c_V}} = \text{const},$$

где P и V — давление и объём соответственно, c_V и $c_P = c_V + R$ — это молярные теплоёмкости при постоянном объёме и давлении.

▲ **Решение. Что происходит.** Это задача на первое начало термодинамики для процессов с постоянной теплоёмкостью. График задаёт работу A и теплоту Q, накопленные от начала цикла. Для процесса с теплоёмкостью c отношение A/Q постоянно и зависит только от c, поэтому каждый отрезок графика — один процесс, и по наклону отрезка находится

его теплоёмкость. Зная теплоёмкости и теплоты, найдём изменения температуры на каждом участке.

Обозначения. $\nu = 1$ моль; $c_V = \frac{5}{2}R$, $c_P = \frac{7}{2}R$ — теплоёмкости двухатомного газа; процессы 1, 2, 3 — отрезки графика по порядку стрелок: $(0;0) \to (9{,}0;1{,}5) \to (1{,}5;1{,}5) \to (0{,}8;0{,}8)$ (в кДж); ΔT_1, ΔT_2, ΔT_3 — изменения температуры на них.

Пункт 1.

1. Работа и подведённая теплота за цикл. В конце цикла газ вернулся в начальное состояние; по графику его полная работа за цикл $A_\text{ц} = 0{,}8$ кДж. Теплоту газ получает только в процессе 1 (Q растёт от 0 до 9,0 кДж); в процессах 2 и 3 накопленная теплота убывает — газ её отдаёт. Поэтому подведённая теплота $Q_+ = 9{,}0$ кДж и

$$\eta = \frac{A_\text{ц}}{Q_+} = \frac{0{,}8\text{ кДж}}{9{,}0\text{ кДж}} = 0{,}089 = 8{,}9\,\%.$$

Пункт 2.

2. Связь работы и теплоты при постоянной теплоёмкости. Первое начало термодинамики для участка с теплоёмкостью c: подведённая теплота идёт на изменение внутренней энергии и работу газа,

$$c\,\Delta T = c_V\,\Delta T + A \quad \Rightarrow \quad A = (c - c_V)\,\Delta T = \frac{c - c_V}{c}\,Q.$$

Отношение A/Q на участке постоянно: на графике $A(Q)$ это отрезок прямой с наклоном $\dfrac{c - c_V}{c}$.

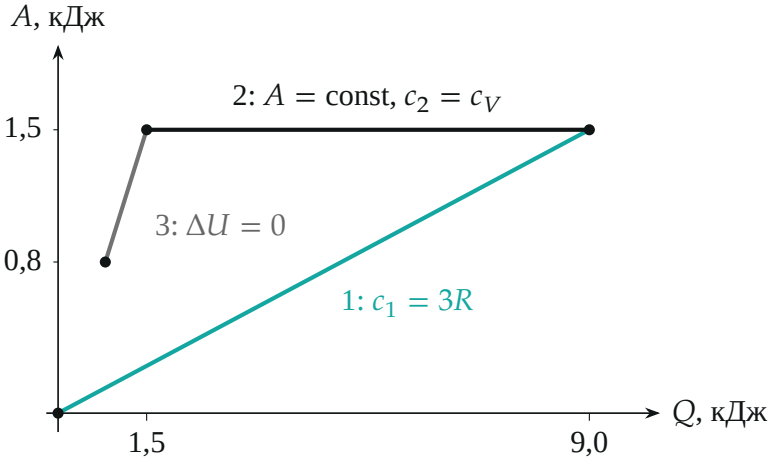


График условия с найденными процессами: 1 — теплоёмкость $3R$ (наклон $\frac{1}{6}$), 2 — изохора (работы нет), 3 — изотерма (наклон 1: вся теплота уходит на работу).

3. Процесс 1. Отрезок идёт из начала координат, его наклон $\dfrac{1{,}5}{9{,}0} = \dfrac{1}{6}$:

$$\frac{c_1 - c_V}{c_1} = \frac{1}{6} \quad \Rightarrow \quad c_1 = \frac{6}{5}\,c_V = \frac{6}{5}\cdot\frac{5}{2}R = 3R.$$

Изменение температуры:

$$\Delta T_1 = \frac{Q_1}{c_1} = \frac{9000\ \text{Дж}}{3\cdot 8{,}31\ \text{Дж/(моль}\cdot\text{К)}} = 361\ \text{К} > 0.$$

4. Процесс 2. Работа не меняется ($A = 1{,}5$ кДж), а теплота уменьшается на $Q_2 = 1{,}5 - 9{,}0 = -7{,}5$ кДж. Работа газа ноль — объём постоянен, это изохора: $c_2 = c_V$,

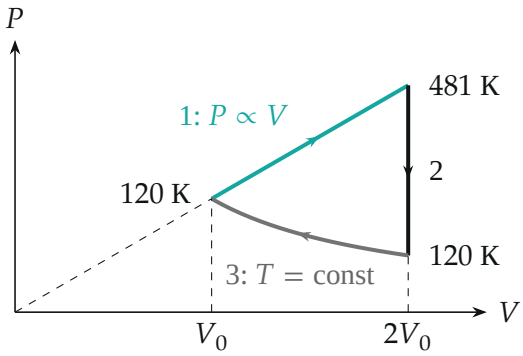
$$\Delta T_2 = \frac{Q_2}{c_V} = \frac{-7500\ \text{Дж}}{\frac{5}{2}\cdot 8{,}31\ \text{Дж/(моль}\cdot\text{К)}} = -361\ \text{К}.$$

5. Процесс 3. Цикл замкнут, температура вернулась к началу: $\Delta T_1 + \Delta T_2 + \Delta T_3 = 0$, и так как $\Delta T_1 + \Delta T_2 = 0$, то $\Delta T_3 = 0$. При конечной

теплоёмкости из $\Delta T_3 = 0$ следовало бы $Q_3 = c\,\Delta T_3 = 0$, а по графику $Q_3 = 0{,}8 - 1{,}5 = -0{,}7$ кДж. Значит, теплоёмкость бесконечна и температура постоянна на всём участке — это изотерма. На графике это видно и так: на участке 3 $\Delta A = \Delta Q = -0{,}7$ кДж, наклон 1, $\Delta U = 0$.

6. Где максимум и минимум температуры. В процессе 1 температура растёт ($Q > 0$, $c_1 > 0$), в процессе 2 падает, в процессе 3 не меняется. Значит, максимальная температура — в конце процесса 1, минимальная — в конце процесса 2 (и на всей изотерме 3, и в начале цикла):

$$T_{\min} = T_{\max} + \Delta T_2 = 481\ \text{K} - 361\ \text{K} = 120\ \text{K}.$$



Цикл на PV-диаграмме (по вычисленным точкам). Процесс 1 с $c = 3R$ — прямая через начало координат, $P \propto V$; процесс 2 — изохора; процесс 3 — изотерма при $T_{\min} = 120$ K.

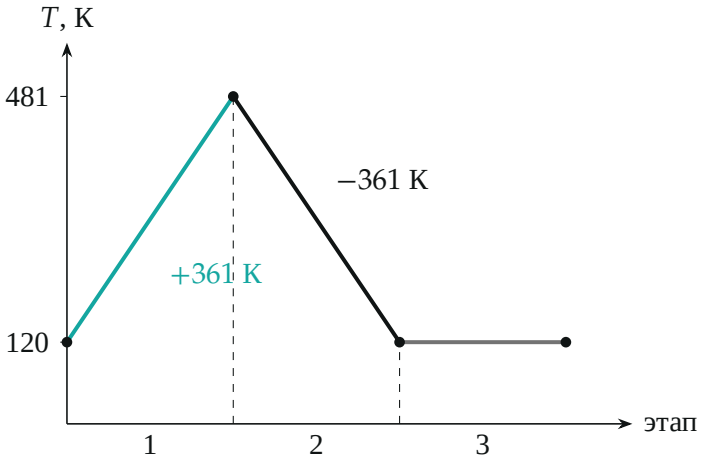
7. Проверка цикла целиком. По примечанию показатель процесса 1

$$n = \frac{c_1 - c_P}{c_1 - c_V} = \frac{3R - \frac{7}{2}R}{3R - \frac{5}{2}R} = -1,$$

$$PV^{-1} = \text{const} \quad \Rightarrow \quad P \propto V, \qquad T \propto PV \propto V^2.$$

Температура выросла в $481/120 \approx 4$ раза, значит, объём — в 2 раза: $V\colon V_0 \to 2V_0$. Работа в процессе 1 — площадь трапеции под прямой: $\frac{P_0 + 2P_0}{2} V_0 = \frac{3}{2} R T_{\min} = \frac{3}{2} \cdot 8{,}31 \cdot 120$ Дж $= 1{,}50$ кДж — как на графике.

Работа изотермического сжатия от $2V_0$ до V_0: $RT_{\min}\ln\frac{1}{2} = -8{,}31 \cdot 120 \cdot 0{,}693$ Дж $= -0{,}69$ кДж — на графике $0{,}8 - 1{,}5 = -0{,}7$ кДж. Работа за цикл $1{,}50 - 0{,}69 = 0{,}81$ кДж совпадает с 0,8 кДж.



Температура газа в начале и в конце каждого процесса: в процессе 1 растёт на 361 K, в процессе 2 падает на столько же, в процессе 3 постоянна.

Обратите внимание. В КПД стоит только полученная газом теплота $Q_+ = 9{,}0$ кДж, а не вся «пройденная» по оси Q: на участках 2 и 3 теплота отдаётся. И начальную точку графика не надо искать на оси T: из графика известны только изменения температуры, а абсолютное значение даёт $T_{\max} = 481$ K.

Проверка. Размерность: $[Q/c]$ = Дж/(Дж/K) = K. КПД меньше КПД Карно между теми же температурами: $1 - \frac{120}{481} = 75\,\% > 8{,}9\,\%$ — как и должно быть. Независимый пересчёт работы через PV-диаграмму (шаг 7) даёт те же 1,5 и 0,8 кДж, что и график условия.

Смысл: по одному графику «работа–теплота» можно восстановить весь цикл: наклон отрезка говорит, какой это процесс, а длина — на сколько изменилась температура.

Ответ. 1) $\eta = \dfrac{A_{\text{ц}}}{Q_+} = \dfrac{0{,}8}{9{,}0} \approx 8{,}9\,\%$; 2) $T_{\min} = 120$ K.