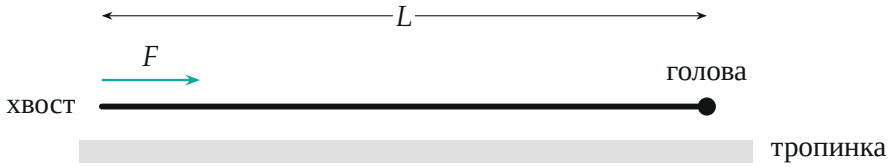
Мартышка тянет удава

Задача 3. [МОШ 2023/24, заключительный этап, 10 класс, задача 3] Удав выпрямился, лежа на горизонтальной поверхности, расслабился и не сопротивляется совсем. Его масса M равномерно распределена по его длине L. Поверхность гладкая, и по ней рядом с удавом и параллельно ему проложена тропинка (не гладкая) для прогулок. Мартышка, находясь на этой тропинке, схватила удава за кончик его хвоста и потащила этот конец удава в направлении к его голове. При этом удав целиком лежит на поверхности. Сила F, с которой мартышка тянет хвост удава, горизонтальна и меняется в зависимости от времени t по закону $F = At$, где A — это известная постоянная величина.

1. С какой скоростью двигался кончик хвоста удава в тот момент, когда расстояние от него до головы удава впервые стало равно $\dfrac{L}{2}$?
2. Через какое время хвост удава поравняется с неподвижной головой удава?
3. Какой будет скорость всего удава в тот момент, когда его голова придёт в движение?

Указание. Может оказаться полезной формула

$$\int_a^b x^n\,dx = \frac{1}{n+1}\left(b^{n+1} - a^{n+1}\right), \quad n \neq -1.$$



Поясняющий рисунок: удав в начальный момент, вид сверху.

▲ **Решение. Что происходит.** Мартышка тянет хвост вдоль самого удава, поэтому удав складывается вдвое: появляется изгиб, за ним — движущаяся «верхняя» ветвь, а остальное тело пока лежит неподвижно (по-

верхность гладкая, неподвижную часть никто не толкает). Масса движущейся части растёт: изгиб «подхватывает» всё новые кусочки. Главный закон — второй закон Ньютона для всего удава в импульсной форме: изменение импульса удава равно импульсу силы мартышки. Трения о поверхность нет, поэтому других горизонтальных сил нет. Класс задачи — система с переменной движущейся массой.

Обозначения. Ось x — вдоль удава от хвоста к голове, начало — в начальном положении хвоста. $X(t)$ — смещение кончика хвоста, $V = \dfrac{dX}{dt}$ — его скорость, $\rho = \dfrac{M}{L}$ — масса единицы длины удава, P — импульс удава (рис. 2).

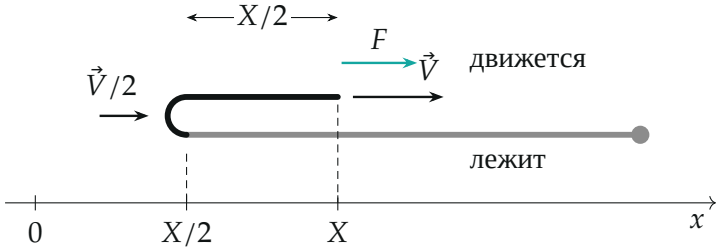


Рис. 2. Хвост сместился на X. Изгиб — в точке $X/2$, движется вся верхняя ветвь длиной $X/2$ со скоростью хвоста V; нижняя ветвь лежит.

1. Геометрия: какая часть удава движется. Удав нерастяжим. Пусть изгиб находится в точке $x_и$. Нижняя ветвь занимает отрезок от $x_и$ до L, верхняя — от $x_и$ до хвоста X; вместе они дают длину удава:

$$(L - x_и) + (X - x_и) = L \quad \Rightarrow \quad x_и = \frac{X}{2}.$$

Верхняя ветвь длиной $X - \dfrac{X}{2} = \dfrac{X}{2}$ натянута между хвостом и изгибом и движется как целое со скоростью хвоста V; нижняя ветвь покоится. Сам изгиб движется вдвое медленнее хвоста, со скоростью $\dfrac{V}{2}$.

2. Импульс удава. Импульс есть только у верхней ветви:

$$P = \rho \frac{X}{2} V = \frac{M}{2L} X \frac{dX}{dt} = \frac{M}{4L} \frac{d\left(X^2\right)}{dt}.$$

3. Второй закон Ньютона для удава. Внешние горизонтальные силы — только сила мартышки F (поверхность гладкая). Импульс удава в начале равен нулю, поэтому к моменту t он равен импульсу силы — площади под графиком $F(t) = At$, то есть треугольника (рис. 3):

$$P(t) = \int_0^t At'\,dt' = \frac{At^2}{2}.$$

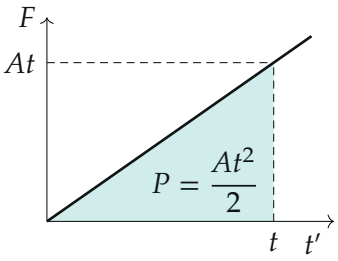


Рис. 3. Импульс, переданный удаву к моменту t, — площадь под графиком силы.

4. Закон движения хвоста. Приравниваем два выражения для импульса:

$$\frac{M}{4L}\,\frac{d\left(X^2\right)}{dt} = \frac{At^2}{2}.$$

Интегрируем от 0 до t по формуле из указания ($n = 2$); в начале $X = 0$:

$$\frac{M}{4L}\,X^2 = \frac{At^3}{6} \quad\Rightarrow\quad X^2 = \frac{2AL}{3M}\,t^3, \qquad t = \left(\frac{3MX^2}{2AL}\right)^{1/3}.$$

Скорость хвоста проще всего взять прямо из шага 2–3: $\dfrac{M}{2L}XV = \dfrac{At^2}{2}$, откуда

$$V = \frac{ALt^2}{MX}.$$

Графики $X(t)$ и $V(t)$ — на рис. 4: хвост разгоняется, но всё медленнее, потому что растёт движущаяся масса.

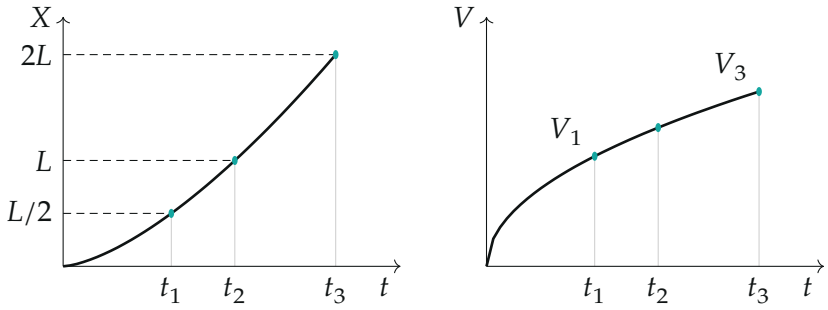


Рис. 4. Смещение хвоста $X \propto t^{3/2}$ и его скорость $V \propto t^{1/2}$ (построено по формулам). Отмечены моменты t_1, t_2, t_3 трёх вопросов задачи.

Пункт 1. Расстояние от хвоста до головы равно $L - X$; впервые оно равно $\dfrac{L}{2}$ при $X = \dfrac{L}{2}$ (рис. 5, вверху). Момент

$$t_1 = \left(\frac{3M}{2AL} \cdot \frac{L^2}{4}\right)^{1/3} = \left(\frac{3ML}{8A}\right)^{1/3},$$

скорость

$$V_1 = \frac{ALt_1^2}{M \cdot L/2} = \frac{2A}{M}\left(\frac{3ML}{8A}\right)^{2/3},$$

$$V_1^3 = \frac{8A^3}{M^3} \cdot \frac{9M^2L^2}{64A^2}, \qquad V_1 = \left(\frac{9AL^2}{8M}\right)^{1/3}.$$

Пункт 2. Хвост поравнялся с головой при $X = L$ (рис. 5, в середине): тогда изгиб — посередине, удав сложен пополам. Голова при этом ещё лежит — до неё изгиб не дошёл. Время

$$t_2 = \left(\frac{3M}{2AL} \cdot L^2\right)^{1/3} = \left(\frac{3ML}{2A}\right)^{1/3}.$$

Пункт 3. Голова придёт в движение, когда до неё дойдёт изгиб: $\dfrac{X}{2} = L$, $X = 2L$ (рис. 5, внизу). В этот момент весь удав вытянут в обратную

сторону и движется как целое со скоростью хвоста. Момент и скорость:

$$t_3 = \left(\frac{3M}{2AL}\cdot 4L^2\right)^{1/3} = \left(\frac{6ML}{A}\right)^{1/3},$$

$$V_3 = \frac{ALt_3^2}{M\cdot 2L} = \frac{A}{2M}\left(\frac{6ML}{A}\right)^{2/3} = \left(\frac{9AL^2}{2M}\right)^{1/3}.$$

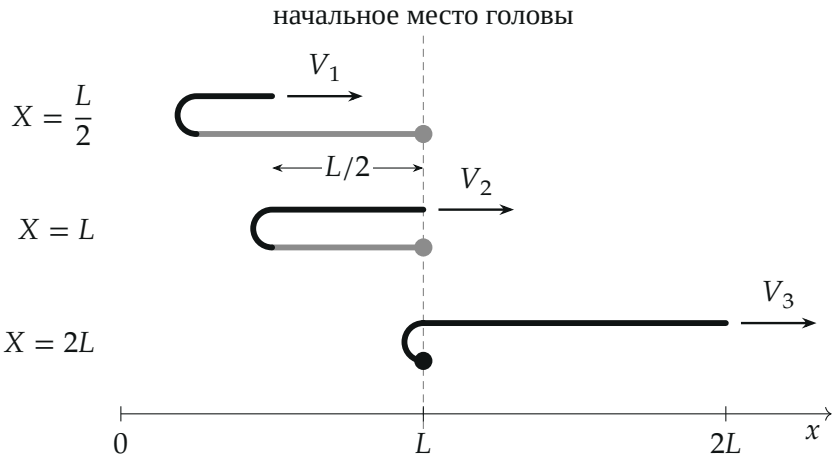


Рис. 5. Три момента задачи: $X = \frac{L}{2}$, $X = L$ и $X = 2L$.

Обратите внимание. Энергия здесь не сохраняется: каждый новый кусочек удава изгиб разгоняет рывком от нуля до V — это неупругий «подхват», как при ударе. Поэтому работать нужно с импульсом, а не с энергией. Кроме того, движется не половина удава, а ветвь длиной $\frac{X}{2}$, — изгиб отстаёт от хвоста вдвое.

Ответ матрёшкой. $X^2 = \frac{2AL}{3M}t^3$, $V = \frac{ALt^2}{MX}$; при $X = \frac{L}{2}, L, 2L$ получаем ответы пунктов 1–3.

Проверка. Размерность: $[A] = \text{Н/с} = \text{кг}\cdot\text{м/с}^3$, поэтому $\left[\frac{AL^2}{M}\right] = \frac{\text{м}^3}{\text{с}^3}$, и $\left(\frac{AL^2}{M}\right)^{1/3}$ — скорость; $\left[\frac{ML}{A}\right] = \text{с}^3$, и t_2 — время. Второй способ для

пункта 3: при $X = 2L$ весь удав движется со скоростью V_3, импульс MV_3 равен $\frac{At_3^2}{2}$; подставляя t_3, получаем $V_3 = \frac{A}{2M}\left(\frac{6ML}{A}\right)^{2/3}$ — то же. Знак: скорость растёт от пункта 1 к пункту 3, как и должно быть при растущей силе.

Смысл: удав — система, которая всё время «подбирает» неподвижную массу, поэтому скорость растёт медленнее импульса, как $t^{1/2}$ при импульсе $\propto t^2$.

Ответ. 1) $V_1 = \left(\frac{9AL^2}{8M}\right)^{1/3}$; 2) $t_2 = \left(\frac{3ML}{2A}\right)^{1/3}$; 3) $V_3 = \left(\frac{9AL^2}{2M}\right)^{1/3}$.