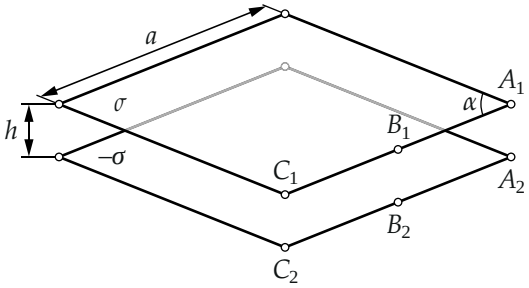
Разности

Задача 4. [МОШ 2023/24, заключительный этап, 10 класс, задача 4] Две одинаковые плоские диэлектрические пластины, заряженные равномерно по поверхности с плотностью σ и $-\sigma$, располагаются параллельно друг другу на небольшом расстоянии h (см. рисунок). Каждая пластина имеет форму ромба с острым углом α $\left(\dfrac{\pi}{6} \leqslant \alpha \leqslant \dfrac{\pi}{3}\right)$ и длиной стороны a ($a \gg h$). Любая вершина верхней пластины и ближайшая к ней вершина нижней пластины лежат на общем перпендикуляре к плоскостям пластин.



1. Найдите разность потенциалов центров пластин. Центром ромба считается точка пересечения его диагоналей.
2. Определите разность потенциалов середин близлежащих сторон пластин (точки B_1 и B_2).
3. Чему равна разность потенциалов вершин ромбов A_1 и A_2? А разность потенциалов вершин C_1 и C_2?

▲ **Решение.** **Что происходит.** Пластины образуют плоский конденсатор. Вдали от краёв поле в нём однородное, и разность потенциалов находится сразу. У края и у вершины поле искажается, считать его напрямую трудно. Главная идея — принцип суперпозиции плюс симметрия: приставим к конденсатору его копии так, чтобы нужная точка оказалась внутри большого конденсатора, где ответ известен, а все копии давали в этой точке одинаковый вклад. Класс задачи — поле системы зарядов через суперпозицию и симметрию.

Обозначения. Для любой точки P верхней пластины и точки под ней на нижней пластине введём $U(P) = \varphi_{\text{верх}} - \varphi_{\text{низ}}$ — искомую разность потенциалов. По принципу суперпозиции потенциалы, а значит и U, от нескольких конденсаторов складываются. $U_0 = \dfrac{\sigma h}{\varepsilon_0}$ — разность потенциалов внутри бесконечного конденсатора.

Пункт 1. Центр. Центр удалён от краёв на расстояние порядка $a \gg h$. Около него конденсатор неотличим от бесконечного: поле однородно, перпендикулярно пластинам и по теореме Гаусса для двух заряженных плоскостей равно

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} + \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

(рис. 2, слева). Идём от нижней пластины к верхней против поля на расстояние h:

$$U_{\text{ц}} = Eh = \frac{\sigma h}{\varepsilon_0} = U_0.$$

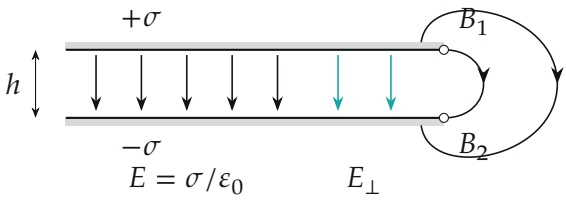


Рис. 2. Разрез конденсатора поперёк края (вид сбоку). Вдали от края поле однородно, у края силовые линии выгибаются наружу, и поперечная составляющая $E_\perp$ уменьшается.

Пункт 2. Середина стороны. У края силовые линии выпучиваются (рис. 2), поле там неоднородно. Применим симметрию. Повернём наш конденсатор на 180° вокруг прямой B_1B_2. Ромб при этом переходит в соседний ромб, приложенный к нему по той же стороне (рис. 3): середина стороны — центр симметрии этой пары. Вместе два конденсатора образуют один конденсатор-параллелограмм, и точка B оказывается внутри него, вдали от краёв (расстояние до краёв порядка $a \gg h$). Значит, для пары

$$U_{\text{пары}}(B) = U_0.$$

С другой стороны, поворот вокруг прямой B_1B_2 оставляет точки B_1 и B_2 на месте, поэтому копия создаёт в них те же потенциалы, что и исходный конденсатор. По принципу суперпозиции

$$U_{\text{пары}}(B) = U(B) + U(B) = 2U(B) \quad \Rightarrow \quad U(B) = \frac{U_0}{2} = \frac{\sigma h}{2\varepsilon_0}.$$

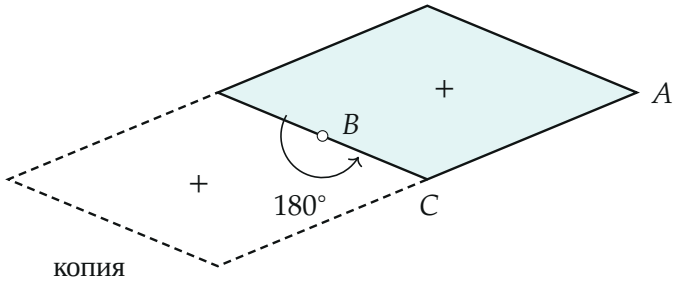


Рис. 3. Вид сверху: верхняя пластина (залита) и её копия, повёрнутая на $180°$ *вокруг вертикали через середину стороны B (пунктир). Вместе — параллелограмм, точка B внутри него.*

Пункт 3. Вершины. Около вершины с углом θ (других краёв ближе a нет) конденсатор выглядит как бесконечный «клин» — две пластины-угла с раствором θ и общей вершиной на одной вертикали. Пусть $U(\theta)$ — разность потенциалов вершин такого клина. Два свойства:

Сложение. Приставим к клину с углом θ_1 клин с углом θ_2 по общей стороне. Получится клин с углом $\theta_1 + \theta_2$, а вершины совпадают. По принципу суперпозиции

$$U(\theta_1 + \theta_2) = U(\theta_1) + U(\theta_2).$$

Полный круг. Клинья, заполнившие весь угол 2π вокруг вершины, дают бесконечный конденсатор, и вершина — обычная внутренняя точка: $U(2\pi) = U_0$.

Из сложения $U(\theta)$ пропорционально углу: например, n одинаковых клиньев с углом $\dfrac{2\pi}{n}$ дают полный круг (рис. 4), так что $U\left(\dfrac{2\pi}{n}\right) = \dfrac{U_0}{n}$,

а k таких клиньев — угол $\dfrac{2\pi k}{n}$ и разность $\dfrac{kU_0}{n}$. Значит,

$$U(\theta) = \frac{\theta}{2\pi}\,U_0 = \frac{\sigma h\,\theta}{2\pi\varepsilon_0}.$$

Проверка на пункте 2: край — это клин с углом $\theta = \pi$, и формула даёт $\dfrac{U_0}{2}$, как и было.

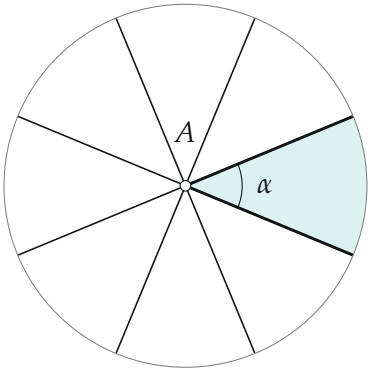


Рис. 4. Вид сверху: угол ромба у вершины A (залит) и его копии, повёрнутые вокруг вертикали через A. При $\alpha = \dfrac{2\pi}{n}$ (здесь $n = 8$) они заполняют полный круг.

У ромба угол при вершине A острый, $\theta = \alpha$; при вершине C тупой, $\theta = \pi - \alpha$ (сумма соседних углов ромба равна π):

$$U(A) = \frac{\sigma\alpha h}{2\pi\varepsilon_0}, \qquad U(C) = \frac{\sigma(\pi-\alpha)h}{2\pi\varepsilon_0}.$$

Все четыре ответа — точки одной прямой на рис. 5.

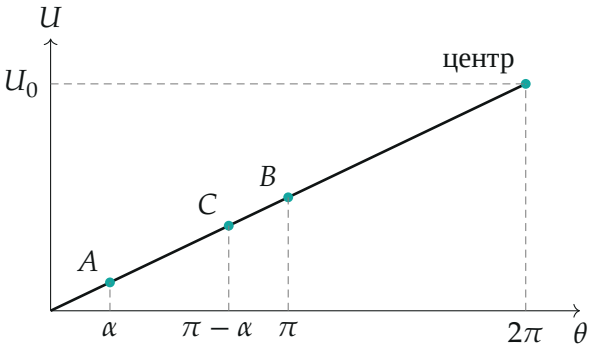


Рис. 5. Разность потенциалов U пропорциональна углу θ, под которым точка «видит» пластину (нарисовано для $\alpha = \pi/4$).

Обратите внимание. Ответ у края и у вершины не зависит от того, как именно выгибаются силовые линии: симметрия и суперпозиция дают его без расчёта поля. Знак ответа — потенциал верхней $(+\sigma)$ пластины выше; разность с обратным знаком тоже засчитывалась.

Ответ матрёшкой. $U = \dfrac{\theta}{2\pi} \cdot \dfrac{\sigma h}{\varepsilon_0}$, где θ — угол пластины при данной точке: 2π в центре, π на середине стороны, α и $\pi - \alpha$ в вершинах.

Проверка. Размерность: $\left[\dfrac{\sigma h}{\varepsilon_0}\right] = \dfrac{\text{Кл/м}^2 \cdot \text{м}}{\text{Кл}^2/(\text{Н} \cdot \text{м}^2)} = \dfrac{\text{Н} \cdot \text{м}}{\text{Кл}} = \text{В}$. Сумма по четырём вершинам ромба

$$2 \cdot \frac{\alpha}{2\pi} U_0 + 2 \cdot \frac{\pi - \alpha}{2\pi} U_0 = U_0$$

— четыре угла ромба, сложенные вместе, дают полный круг 2π, как и должно быть. Предел: при $\theta \to 0$ (очень острая вершина) пластина у точки исчезает и $U \to 0$.

Ответ. 1) $\dfrac{\sigma h}{\varepsilon_0}$; 2) $\dfrac{\sigma h}{2\varepsilon_0}$; 3) $\varphi_{A_1} - \varphi_{A_2} = \dfrac{\sigma \alpha h}{2\pi\varepsilon_0}$, $\varphi_{C_1} - \varphi_{C_2} = \dfrac{\sigma(\pi - \alpha)h}{2\pi\varepsilon_0}$.