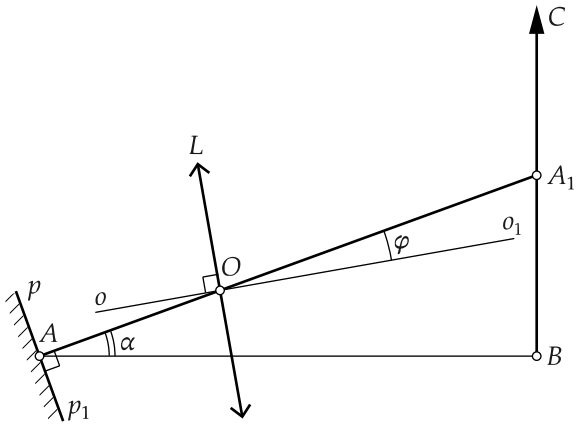
Tilt-Shift

Задача 5. [МОШ 2023/24, заключительный этап, 10 класс, задача 5] Конструкция фотографического Tilt-shift объектива позволяет наклонять и сдвигать оптическую ось объектива относительно линии зрения (линии, соединяющий фотоаппарат и объект съёмки). Наклон оптической оси даёт возможность получать резкие изображения протяжённых предметов, разные точки которых находятся на разном расстоянии от фотоаппарата.

На упрощённой схеме, представленной на рисунке, собирающая линза L символизирует объектив. Главная оптическая ось объектива oo_1 отклонена на угол φ от линии зрения AA_1, составляющей угол α с горизонталью. Фотографируемый предмет изображается отрезком BC, pp_1 — плоскость, в которой располагается светочувствительная матрица фотоаппарата (или плёнка, если речь идёт о плёночной камере).



Пусть известны расстояние $AB = 5$ м по горизонтали между матрицей фотоаппарата и предметом, фокусное расстояние объектива $f = 50$ мм, а также угол $\alpha = \dfrac{\pi}{4}$ между линией зрения и горизонталью. Угол поворота главной оптической оси φ подобран так, чтобы все точки светящегося отрезка BC изображались в плоскости матрицы фотоаппарата pp_1 максимально резко. Найдите угол φ, считая его малым.

Указание. Для малого угла β ($|\beta| \ll 1$) справедливы приближённые соотношения $\sin\beta \approx \beta$, $\operatorname{tg}\beta \approx \beta$, $\cos\beta \approx 1$.

▲ **Решение. Что происходит.** Матрица стоит перпендикулярно линии зрения, а предмет BC — вертикально, то есть к линии зрения он наклонён. Разные точки предмета находятся на разных расстояниях от линзы, и обычная линза (ось вдоль линии зрения) собирает их изображения на наклонённой прямой, а не на матрице. Наклоном линзы можно повернуть эту прямую изображений так, чтобы она легла на матрицу. Главная идея — правило Шаймпфлюга: прямая предмета, плоскость линзы и плоскость матрицы должны пересекаться в одной точке; затем — формула тонкой линзы для одной пары точек. Класс задачи — построение изображения в тонкой линзе плюс геометрия.

Обозначения. $L = AB = 5$ м, $D = AA_1$ — длина отрезка линии зрения от матрицы до предмета, O — центр линзы, G — точка пересечения прямой BC с прямой матрицы pp_1; a и a_1 — расстояния от точек A и A_1 до плоскости линзы (рис. 4). На рисунках 2–4 угол φ и фокусное расстояние для наглядности сильно преувеличены, все точки и лучи построены расчётом.

1. Почему без наклона резкости нет. Пусть ось линзы идёт вдоль линии зрения ($\varphi = 0$, рис. 2). Точку A_1 линза изображает в точку A матрицы (так выбрано расстояние до линзы). Но точки M и B ближе к линзе, чем A_1, и их изображения уходят дальше от линзы, а точка C дальше — и её изображение ближе. Изображения точек BC легли на прямую, наклонённую к матрице: резко получится только середина.

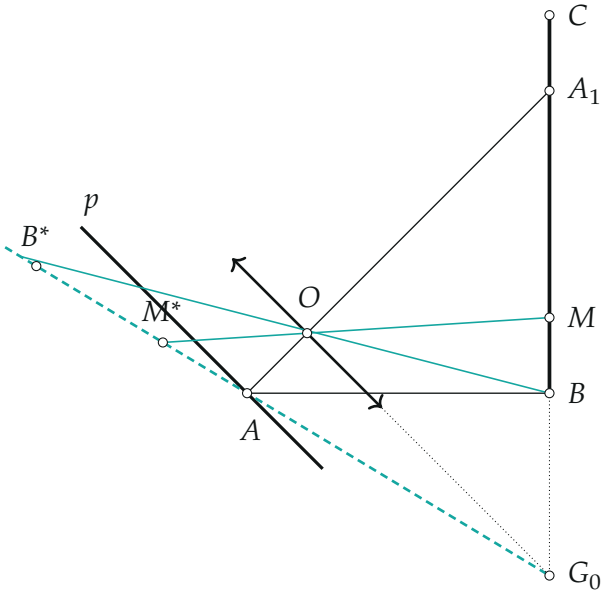


Рис. 2. Линза без наклона ($\varphi = 0$). Лучи через центр O из точек B и M предмета дают изображения B^* и M^*; прямая изображений (бирюзовый пунктир) наклонена к матрице pp_1 и пересекает её только в A.

2. Условие резкости (правило Шаймпфлюга). Тонкая линза изображает прямую в прямую. Значит, изображение прямой BC — прямая, и её задают две точки.

Первая точка — изображение A_1. Луч A_1O через центр линзы не преломляется, поэтому изображение A_1 лежит на линии зрения; оно должно быть на матрице, значит, это точка A.

Вторая точка — точка G', где прямая BC пересекает плоскость линзы. Точка, лежащая в самой линзе, изображается сама в себя.

Изображение всего предмета — прямая AG'. Она совпадёт с матрицей тогда и только тогда, когда G' лежит на прямой матрицы, то есть $G' = G$: *прямая предмета, линза и матрица пересекаются в одной точке* G (рис. 3). Отсюда положение линзы: она проходит через O и через G.

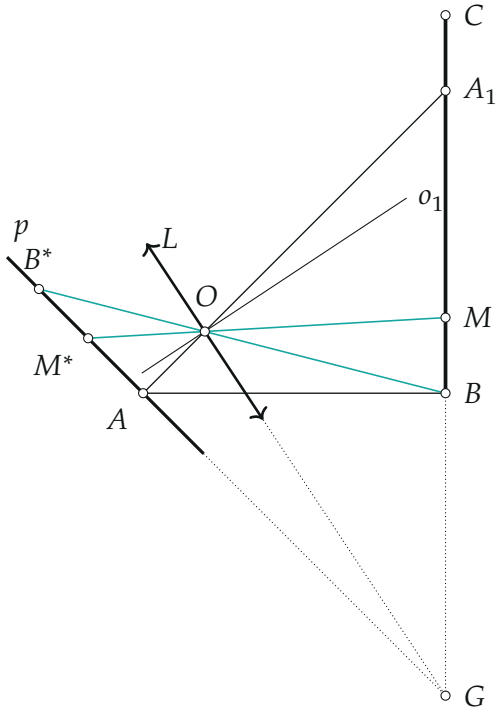


Рис. 3. Линза наклонена так, что прямые BC, линзы и матрицы встречаются в точке G. Изображения B^* и M^* (лучи через центр) легли на матрицу.

3. Геометрия. Матрица перпендикулярна линии зрения, поэтому угол GAA_1 прямой. В прямоугольном треугольнике ABA_1 угол при A равен $\alpha = \dfrac{\pi}{4}$, значит

$$D = AA_1 = \frac{L}{\cos\alpha} = L\sqrt{2}.$$

Прямая AG идёт под углом $\dfrac{\pi}{2} - \alpha = \dfrac{\pi}{4}$ вниз от горизонтали, и треугольник ABG тоже прямоугольный и равнобедренный: $AG = L\sqrt{2} = D$.

Угол между линзой и матрицей равен углу между их перпендикулярами — оптической осью и линией зрения, то есть φ. Это угол при вершине G прямоугольного треугольника AOG (рис. 4):

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{AO}{AG} = \frac{AO}{D}.$$

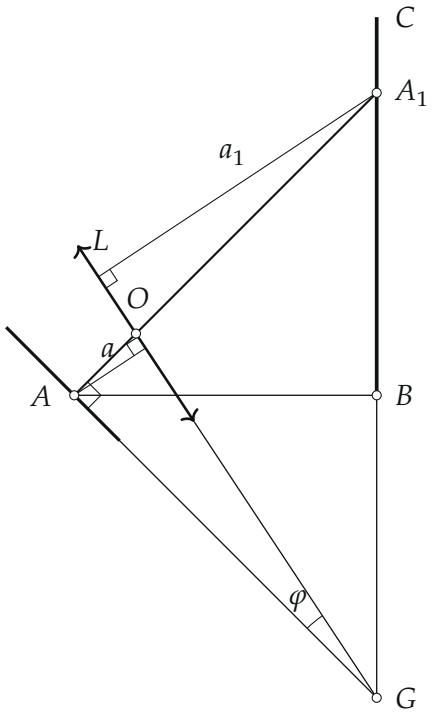


Рис. 4. Расстояния a и a_1 от точек A и A_1 до линзы и искомый угол φ при вершине G прямоугольного треугольника AOG.

4. Формула линзы. Точка A_1 изображается в точку A; расстояния от них до плоскости линзы a_1 и a, по формуле тонкой линзы

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{a_1}=\frac{1}{f}.$$

Расстояния по перпендикуляру к линзе: $a = AO\cos\varphi$, $a_1 = A_1O\cos\varphi$; угол мал, $\cos\varphi \approx 1$, поэтому

$$a + a_1 = AO + A_1O = D = L\sqrt{2}.$$

Из двух уравнений $aa_1 = fD$, $a_1 = D - a$, получаем квадратное уравнение $a^2 - Da + fD = 0$. Объектив ближе к матрице, чем к предмету,

поэтому берём меньший корень:

$$a = \frac{D}{2}\left(1 - \sqrt{1 - \frac{4f}{D}}\right) \approx \frac{D}{2} \cdot \frac{2f}{D} = f,$$

так как $\frac{4f}{D} = \frac{4 \cdot 0{,}05}{7{,}07} = 0{,}028 \ll 1$ и $\sqrt{1-x} \approx 1 - \frac{x}{2}$. Матрица стоит практически в фокальной плоскости — предмет далеко.

5. Угол. Из шага 3 при малом φ ($\operatorname{tg}\varphi \approx \varphi$, $AO \approx a$):

$$\varphi \approx \frac{a}{D} \approx \frac{f}{L\sqrt{2}} = \frac{0{,}05\ \text{м}}{5\ \text{м} \cdot 1{,}414} = 7{,}1 \cdot 10^{-3}\ \text{рад} \approx 0{,}4^\circ.$$

Обратите внимание. Резкость всего предмета требует не «правильного расстояния», а правильного наклона: при $\varphi = 0$ одно расстояние до линзы не может быть верным сразу для близкой точки B и далёкой C. И наклон нужен совсем маленький — меньше половины градуса, — потому что $f \ll L$.

Ответ матрёшкой. $\varphi \approx \frac{f}{AG} = \frac{f\cos\alpha}{L} = \frac{f}{L\sqrt{2}}$.

Проверка. Размерность: отношение двух длин, угол безразмерен. Предел: при $f \to 0$ или $L \to \infty$ (предмет бесконечно далеко, все точки «одинаково далеки») наклон не нужен, $\varphi \to 0$. Точный расчёт без приближений (численное решение $\operatorname{tg}\varphi = \frac{AO}{D}$ и $\frac{1}{AO\cos\varphi} + \frac{1}{(D-AO)\cos\varphi} = \frac{1}{f}$) даёт $\varphi = 7{,}12 \cdot 10^{-3}$ рад, отличие от приближённого — поправка порядка $\frac{f}{D} \approx 0{,}7\,\%$.

Ответ. $\varphi \approx \frac{f}{L\sqrt{2}} \approx 7{,}1 \cdot 10^{-3}$ рад $\approx 0{,}4^\circ$, где $L = AB$.