График потенциала

Задача 1. [МОШ 2023/24, заключительный этап, 11 класс, задача 1] Три одинаковых тонких диска радиусом R, однородно заряженных с поверхностной плотностью σ, 2σ и -3σ, расположены так, что ось OX является общей осью этих дисков, при этом центры дисков находятся в точках с координатами 0, d и $2d$, где $d = \dfrac{R}{1000}$. Потенциал в центре уединённого диска, заряженного однородно с поверхностной плотностью σ, равен 1000 В. Потенциал бесконечно удалённой точки считается равным нулю.

a) (2 балла) Получите формулу $\varphi_0 = \dfrac{\sigma R}{2\varepsilon_0}$, дающую потенциал в центре уединённого однородно заряженного диска. Эту формулу разрешается использовать при выполнении задания следующего пункта, даже если вы не можете её вывести.

b) (4 балла) Изобразите график зависимости потенциала φ электрического поля дисков в точках, лежащих на оси OX, от безразмерной координаты $a = \dfrac{x}{d}$ для значений a, принадлежащих отрезку $[0;\, 2]$.

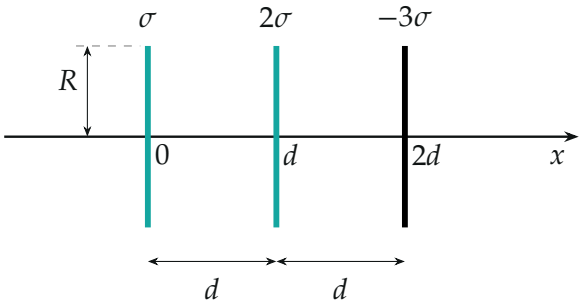


Рис. 1. Диски сбоку (в разрезе), поясняющий рисунок: $d = R/1000$, поэтому масштаб вдоль оси не соблюдён.

▲ **Решение. Что происходит.** Потенциал системы зарядов — сумма потенциалов её частей (суперпозиция). Около диска, на расстояниях порядка $d \ll R$ от него, поле однородно, поэтому потенциал диска на оси по обе стороны от центра линейно убывает: график одного диска —

«крыша» с вершиной в центре. Главная идея: суммарный заряд дисков равен нулю, $\sigma + 2\sigma - 3\sigma = 0$, поэтому огромные вершины «крыш» (по сотням вольт) сокращаются при сложении, и остаются только линейные части — единицы вольт.

Обозначения. $\varphi_0 = \dfrac{\sigma R}{2\varepsilon_0} = 1000$ В — потенциал в центре уединённого диска с плотностью σ; x — координата вдоль оси OX от центра первого диска, $a = x/d$.

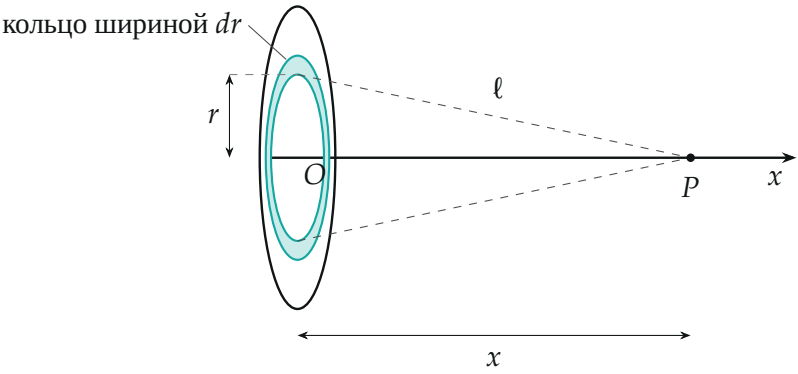


Рис. 2. Диск (вид сбоку, наклонно) и тонкое кольцо $r \dots r + dr$; все точки кольца одинаково удалены от точки P на оси: $\ell = \sqrt{r^2 + x^2}$.

Пункт а).

1. Потенциал в центре. Разобьём диск на тонкие кольца (рис. 2): кольцо радиусом r и шириной dr несёт заряд $dq = \sigma \cdot 2\pi r\, dr$. В центре диска ($x = 0$) все точки кольца находятся на одном расстоянии r, поэтому потенциал точечного заряда можно взять для всего заряда кольца сразу:

$$d\varphi = \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0 r} = \frac{\sigma\, 2\pi r\, dr}{4\pi\varepsilon_0 r} = \frac{\sigma\, dr}{2\varepsilon_0}.$$

Потенциал — скаляр, поэтому потенциалы колец складываются просто суммой, от $r = 0$ до $r = R$:

$$\varphi_0 = \int_0^R \frac{\sigma\, dr}{2\varepsilon_0} = \frac{\sigma R}{2\varepsilon_0}.$$

Пункт b).

2. Потенциал диска на оси. В точке P на оси на расстоянии x от центра то же кольцо даёт $d\varphi = \dfrac{\sigma\, 2\pi r\, dr}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{r^2+x^2}}$ (расстояние $\ell = \sqrt{r^2+x^2}$ одно для всех точек кольца, рис. 2). Интегрируем от 0 до R:

$$\varphi(x) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\int_0^R \frac{r\,dr}{\sqrt{r^2+x^2}} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\Big(\sqrt{R^2+x^2} - |x|\Big).$$

Нас интересуют $|x| \le 2d = R/500 \ll R$. Тогда $\sqrt{R^2+x^2} \approx R + \dfrac{x^2}{2R}$, а поправка $\dfrac{x^2}{2R}$ меньше слагаемого $|x|$ в $\dfrac{|x|}{2R} \lesssim 10^{-3}$ раз, и ею можно пренебречь:

$$\varphi(x) \approx \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}(R - |x|) = \varphi_0 - \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}|x|.$$

Это и есть «крыша»: вершина φ_0 в центре, спад по обе стороны с наклоном $\dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}$ (поле диска вблизи него $E = \dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}$). Для диска с плотностью $k\sigma$ и центром в точке x_i всё умножается на k и $|x|$ заменяется на $|x - x_i|$.

3. Суперпозиция. Сложим потенциалы трёх дисков ($k = 1, 2, -3$; центры 0, d, $2d$):

$$\varphi(x) = \frac{\sigma(1+2-3)}{2\varepsilon_0}R - \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\Big(|x| + 2|x-d| - 3|x-2d|\Big).$$

Первое слагаемое равно нулю — вершины сократились. Осталось подставить число. По условию $\dfrac{\sigma R}{2\varepsilon_0} = 1000$ В, значит $\dfrac{\sigma d}{2\varepsilon_0} = 1000\text{ В}\cdot\dfrac{d}{R} = 1$ В, и в безразмерной координате $a = x/d$:

$$\varphi(a) = -\Big(|a| + 2|a-1| - 3|a-2|\Big)\text{ В}.$$

4. Раскрытие модулей. На каждом участке внутри модулей знаки по-

стоянны:

$$0 \le a \le 1: \ \varphi = -(a + 2(1-a) - 3(2-a)) = 4 - 2a \text{ В},$$
$$1 \le a \le 2: \ \varphi = -(a + 2(a-1) - 3(2-a)) = 8 - 6a \text{ В}.$$

Левее первого диска ($a < 0$) и правее третьего ($a > 2$) та же выкладка даёт постоянные значения $\varphi = 4$ В и $\varphi = -4$ В: поле там не меняется, потому что суммарный заряд дисков нулевой. На рис. 3 видно, как складываются три «крыши», на рис. 4 — итоговый график.

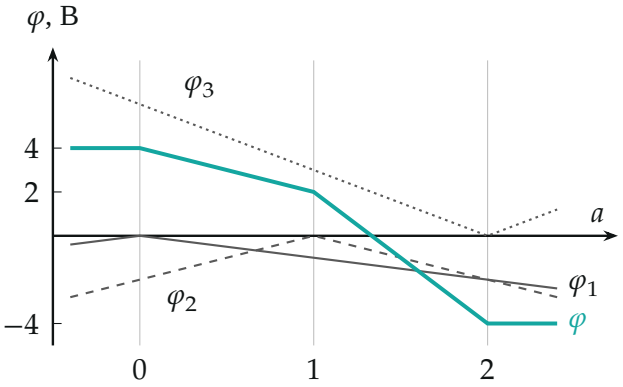


Рис. 3. «Крыши» дисков с вычтенными вершинами: $\varphi_1 = -|a|$, $\varphi_2 = -2|a-1|$, $\varphi_3 = 3|a-2|$ (в вольтах). Сумма — бирюзовая ломаная $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3$.

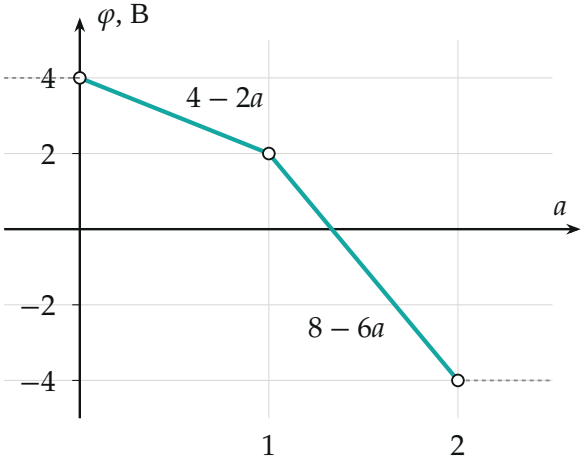


Рис. 4. Потенциал на оси: от 4 В при $a = 0$ через 2 В при $a = 1$ до -4 В при $a = 2$; две прямые с наклонами -2 и -6 В на единицу a.

Обратите внимание: линейность ($\varphi_0 - \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}|x|$) верна только при $|x| \ll R$; поэтому график годен именно на отрезке порядка $d = R/1000$, а не на больших расстояниях.

5. Тот же график без формулы для диска. Три диска — это два плоских конденсатора, наложенных друг на друга: $+3\sigma$ и -3σ в точках 0 и $2d$ (конденсатор A) плюс -2σ и $+2\sigma$ в точках 0 и d (конденсатор B). Заряды складываются правильно: $3\sigma - 2\sigma = \sigma$ в нуле, 2σ в точке d, -3σ в точке $2d$.

Потенциал плоского конденсатора с плотностями $\pm\sigma_k$ и расстоянием $D \ll R$ между пластинами (пластины можно считать бесконечными) находится без формул для диска. Внутри конденсатора поле $E = \sigma_k/\varepsilon_0$, снаружи его нет, значит снаружи потенциал постоянен, а внутри меняется линейно на $ED = \sigma_k D/\varepsilon_0$. Конденсатор симметричен относительно своей середины с заменой знака заряда, поэтому потенциал в середине равен нулю, а снаружи равен $\pm\dfrac{\sigma_k D}{2\varepsilon_0}$: у положительной пластины выше, у отрицательной ниже. С $\dfrac{\sigma d}{\varepsilon_0} = 2$ В получаем:

- конденсатор с $\pm 3\sigma$ и $D = 2d$: перепад $\dfrac{3\sigma \cdot 2d}{\varepsilon_0} = 12$ В, потенциал $+6$ В слева от $x = 0$, затем линейный спад $6 - 6a$ и -6 В справа от $a = 2$;
- конденсатор с $\mp 2\sigma$ и $D = d$ (положительная пластина в точке d): перепад $\dfrac{2\sigma d}{\varepsilon_0} = 4$ В, потенциал -2 В слева от $a = 0$, подъём $-2 + 4a$ и $+2$ В справа от $a = 1$.

Сумма (рис. 5): при $a \le 0$ получаем $6 - 2 = 4$ В; в точке $a = 1$ получаем $0 + 2 = 2$ В; при $a \ge 2$ получаем $-6 + 2 = -4$ В — те же значения.

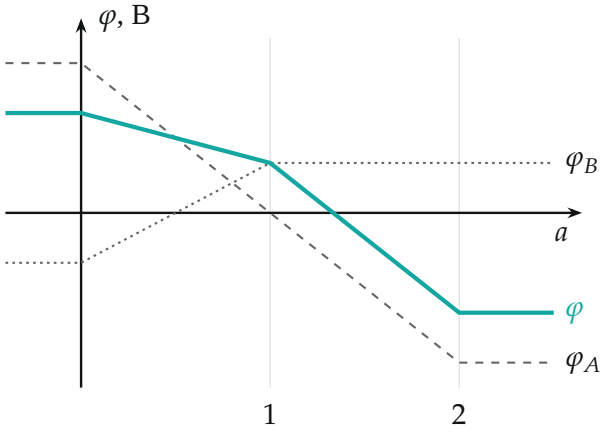


Рис. 5. Потенциалы конденсатора A ($\pm 3\sigma$, штрихи) и конденсатора B ($\mp 2\sigma$, точки) и их сумма — прежний график (бирюзовый).

Проверка. Заряд дисков связан с изломом графика теоремой Гаусса: поле по обе стороны диска различается на σ_i/ε_0, поэтому наклон $d\varphi/da = -Ed$ у каждого диска скачком уменьшается на $\dfrac{\sigma_i d}{\varepsilon_0} = 2\sigma_i/\sigma$ В. Из графика: при $a = 0$ наклон меняется с 0 на -2 В на единицу (уменьшился на 2 — заряд σ), при $a = 1$ — с -2 на -6 (уменьшился на 4 — заряд 2σ), при $a = 2$ — с -6 на 0 (вырос на 6 — заряд -3σ). Скачки относятся как $1 : 2 : -3$, как заряды, и в сумме дают нуль, как суммарный заряд. Размерность: σ/ε_0 — напряжённость (В/м), умноженная на длину R, даёт вольты.

Смысл: при нулевом суммарном заряде вершины «крыш» по тысяче вольт сокращаются, и потенциал на расстояниях порядка d определяется только наклонами — единицами вольт.

Ответ. a) $\varphi_0 = \dfrac{\sigma R}{2\varepsilon_0}$; b) $\varphi(a) = (4 - 2a)$ В при $0 \le a \le 1$ и $\varphi(a) = (8 - 6a)$ В при $1 \le a \le 2$: ломаная из точек $(0;\ 4\text{ В})$, $(1;\ 2\text{ В})$, $(2;\ -4\text{ В})$ (рис. 4).