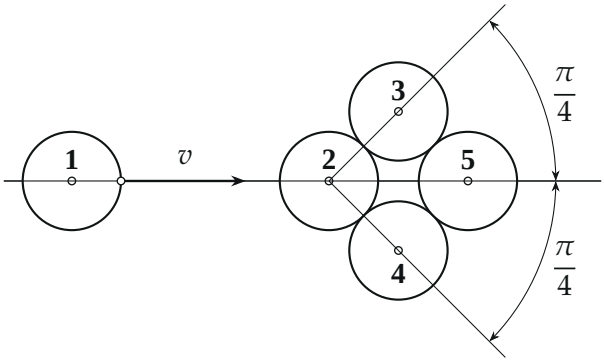
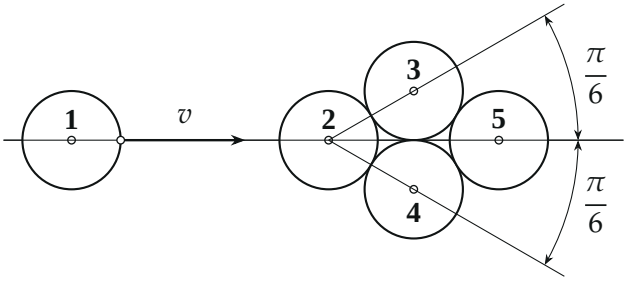
Аэрохоккей

Задача 2. [МОШ 2023/24, заключительный этап, 11 класс, задача 2] Шайбы одинаковой массы могут скользить по горизонтальной поверхности без трения. Боковая поверхность шайб гладкая, столкновения между шайбами можно считать абсолютно упругими.

a) (2 балла) В начальный момент шайбы 2, 3, 4, 5 располагаются так, что их центры являются вершинами квадрата (см. рисунок), шайба 1 налетает на шайбу 2 со скоростью $v = 1$ м/с. Найдите скорости шайб после того, как все столкновения прекратятся.



b) (6 баллов) В этом случае центры неподвижных шайб образуют ромб с острым углом $\frac{\pi}{3}$ (см. рисунок), шайба 1 налетает на шайбу 2 с такой же скоростью $v = 1$ м/с, как и в первом случае. Найдите скорости шайб после того, как все столкновения прекратятся.



В обоих случаях считайте, что столкновения происходят мгновенно. За время столкновения шайбы не успевают сдвинуться. В точках на рисунке, где шайбы касаются друг друга, на самом деле они разделены микроскопическими воздушными зазорами.

▲ **Решение. Что происходит.** Шайбы гладкие, поэтому при ударе шайбы действуют друг на друга только вдоль линии центров (нормали в точке касания): импульс шайбы меняется лишь вдоль неё, а составляющая скорости вдоль общей касательной не меняется. Удары упругие, значит, сохраняются импульс системы и её кинетическая энергия. Главная идея: пройти по цепочке мгновенных ударов и в каждом записать эти два закона для всех шайб, участвующих в ударе. При центральном упругом ударе шайб равной массы они обмениваются скоростями. Класс задачи — одновременный упругий удар одной шайбы о две; симметрия относительно оси x упрощает счёт.

Обозначения. Масса шайбы m, диаметр D; ось x — вдоль $\vec{v}$. Промежуточные скорости шайбы i — u_i, окончательные — v_i.

Пункт а).

1. Шайба 1 бьёт шайбу 2. Удар центральный, шайбы равной массы: сохранение импульса и энергии системы двух шайб даёт $v = u_1 + u_2$ и $v^2 = u_1^2 + u_2^2$, откуда $u_1 = 0$, $u_2 = v$ (второе решение $u_1 = v$, $u_2 = 0$ — «шайба прошла сквозь» — невозможно). Шайба 1 останавливается и дальше стоит.

2. Шайба 2 бьёт шайбы 3 и 4 сразу. Линии центров 2–3 и 2–4 составляют углы $\pm\dfrac{\pi}{4}$ с осью x (условие, рис. 1). Шайбы 3 и 4 покоились, а сила со стороны шайбы 2 направлена вдоль линии центров, поэтому их скорости направлены под $\pm\dfrac{\pi}{4}$ к оси x, по модулю равны (симметрия) u_3. Шайба 2 по симметрии движется вдоль x со скоростью u_2. Запишем законы для системы шайб 2, 3, 4 — сохранение импульса в проекции на x и кинетической энергии:

$$mv = mu_2 + 2mu_3\cos\frac{\pi}{4}, \qquad \frac{mv^2}{2} = \frac{mu_2^2}{2} + 2\cdot\frac{mu_3^2}{2}.$$

Сократим на m: $v - u_2 = \sqrt{2}\,u_3$ и $v^2 - u_2^2 = 2u_3^2$. Разделим второе

уравнение на первое (при $u_3 \neq 0$, иначе удара нет): $v + u_2 = \sqrt{2}\,u_3 = v - u_2$, откуда $u_2 = 0$, $u_3 = \dfrac{v}{\sqrt{2}}$. Шайба 2 остановилась, шайбы 3 и 4 разлетаются под углами $\pm 45^\circ$ со скоростью $\dfrac{v}{\sqrt{2}} \approx 0{,}71$ м/с.

3. Будут ли ещё удары? Линия центров 3–5 (угол -45° к оси x) перпендикулярна скорости шайбы 3 ($+45^\circ$, рис. 3), поэтому расстояние между центрами при движении только растёт: $\ell^2 = D^2 + (ut)^2$, и удара нет; то же для шайбы 4. Шайбы 1, 2, 5 стоят.

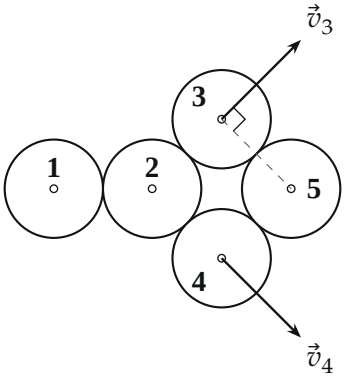


Рис. 3. Пункт a): после всех ударов; штрих — линия центров 3–5, перпендикулярная $\vec{v}_3$.

Пункт b).

4. Первый удар. Как в пункте a), шайба 1 останавливается (остаётся стоять у шайбы 2), а шайба 2 приобретает скорость v.

5. Шайба 2 бьёт шайбы 3 и 4. Обратите внимание: это один удар по двум шайбам сразу, а не два удара подряд — шайба 2 получает импульсы от обеих одновременно, и скорость u_2 у неё одна. Теперь линии центров составляют $\pm\dfrac{\pi}{6}$ с осью (рис. 2). Те же два закона для шайб 2, 3, 4 (шайбы 3 и 4 при этом касаются друг друга, но, как увидим, после удара разлетаются в стороны, и силы между ними нет):

$$v - u_2 = 2u_3 \cos\frac{\pi}{6} = \sqrt{3}\,u_3, \qquad v^2 - u_2^2 = 2u_3^2.$$

Разделим: $v + u_2 = \dfrac{2u_3}{\sqrt{3}}$, то есть $u_3 = \dfrac{\sqrt{3}}{2}(v + u_2)$. Подставим в первое: $v - u_2 = \dfrac{3}{2}(v + u_2)$, откуда

$$u_2 = -\frac{v}{5}, \qquad u_3 = u_4 = \frac{2\sqrt{3}}{5}\,v \approx 0{,}69\,v.$$

Знак «минус»: шайба 2 отскакивает назад (рис. 4). Линии центров близки к оси ($\cos^2 30^\circ = \frac{3}{4}$), и пара шайб 3, 4 «весит» для шайбы 2 как $2m\cos^2 30^\circ = 1{,}5\,m > m$.

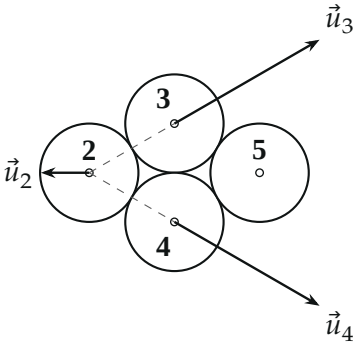


Рис. 4. Скорости после удара шайбы 2 по шайбам 3 и 4 (пунктир — линии центров).

6. Шайба 2 возвращается. Шайба 2 летит назад со скоростью $\dfrac{v}{5}$ и сразу бьёт стоящую вплотную шайбу 1: центральный удар равных масс, шайбы обмениваются скоростями. Шайба 2 остановилась, шайба 1 движется влево со скоростью $\dfrac{v}{5} = 0{,}2$ м/с.

7. Шайбы 3 и 4 бьют шайбу 5. Удары симметричны, шайба 5 по симметрии летит вдоль x. Рассмотрим шайбу 3: линия её центра с центром шайбы 5 направлена под -30°, а её скорость u_3 — под $+30^\circ$ (рис. 5), угол между ними 60°. Разложим скорость на составляющую w вдоль линии центров и $u_\perp$ поперёк:

$$w = u_3\cos 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{5}\,v, \qquad u_\perp = u_3\cos 30^\circ = \frac{3}{5}\,v.$$

Поперечная составляющая $u_\perp$ при ударе не меняется (шайбы гладкие). Продольная после удара — w'. Шайба 5 получает от шайб 3 и 4 импульсы $m(w - w')$ вдоль линий центров, под $\pm 30^\circ$ к x. Импульс шайб 3, 4, 5 в проекции на x и энергия (поперечные части энергии не меняются и сокращаются):

$$v_5 = 2(w - w')\cos 30^\circ = \sqrt{3}\,(w - w'), \qquad 2w^2 = 2w'^2 + v_5^2.$$

Подставим v_5 во второе: $2(w - w')(w + w') = 3(w - w')^2$. Сократим на $w - w' \neq 0$ (удар состоялся): $2(w + w') = 3(w - w')$, откуда

$$w' = \frac{w}{5} = \frac{\sqrt{3}}{25}\,v, \qquad v_5 = \sqrt{3}\cdot\frac{4}{5}w = \frac{12}{25}\,v = 0{,}48\,v.$$

(Корень $w' = w$, отброшенный при сокращении, — «удара не было».)

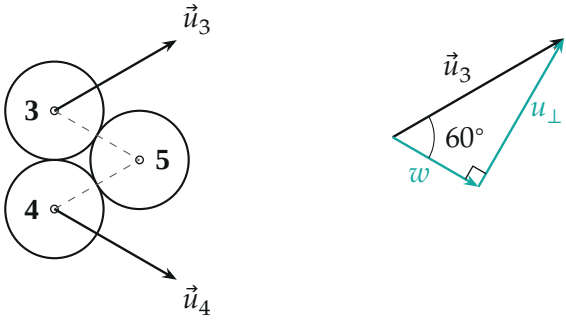


Рис. 5. Слева — шайбы 3, 4 перед ударом о шайбу 5 (штрих — линии центров). Справа — разложение скорости $\vec{u}_3$ на продольную w (вдоль линии центров) и поперечную $u_\perp$; $w = \frac{\sqrt{3}}{5}v$, $u_\perp = \frac{3}{5}v$.

8. Скорости шайб 3 и 4. Поперечная составляющая $\frac{3}{5}v$ осталась, продольная стала $\frac{\sqrt{3}}{25}v$, поэтому

$$v_3 = v_4 = \sqrt{u_\perp^2 + w'^2} = \sqrt{\frac{9}{25} + \frac{3}{625}}\,v = \frac{2\sqrt{57}}{25}\,v \approx 0{,}60\,v.$$

Проекции: $v_{3x} = \dfrac{9}{25}v$, $v_{3y} = \dfrac{7\sqrt{3}}{25}v$ (около 53° к оси x); шайба 4 — зеркально. Дальнейших ударов нет: после упругого удара шайбы 3, 4 и 5 расходятся, шайбы 3 и 4 удаляются друг от друга, шайба 2 стоит, шайба 1 уходит от неё.

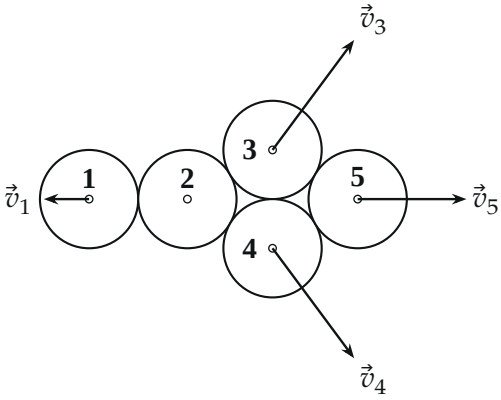


Рис. 6. Пункт b): итоговые скорости шайб (положения — на моменты ударов, масштаб скоростей один для всех).

Проверка. Энергия (в долях $\dfrac{mv^2}{2}$) и импульс вдоль x (в долях mv):

$$\left(\tfrac{1}{5}\right)^2 + 2\cdot\tfrac{228}{625} + \left(\tfrac{12}{25}\right)^2 = \tfrac{25+456+144}{625} = 1,$$
$$-\tfrac{1}{5} + 2\cdot\tfrac{9}{25} + \tfrac{12}{25} = \tfrac{-5+18+12}{25} = 1.$$

Второй способ для удара 2 о 3 и 4: упругость — скорость расхождения вдоль линии центров равна скорости сближения: $u_3 - u_2\cos\theta = v\cos\theta$ (θ — угол линии центров с осью). Вместе с законом импульса это даёт $u_2 = v\,\dfrac{1-2\cos^2\theta}{1+2\cos^2\theta}$: 0 при $\theta = 45°$ и $-\dfrac{v}{5}$ при 30° — те же значения.

Смысл: острый угол ромба делает пару шайб 3, 4 «тяжелее» шайбы 2, и она отскакивает назад.

Ответ. a) $v_1 = v_2 = v_5 = 0$, $v_3 = v_4 = \dfrac{v}{\sqrt{2}} \approx 0{,}71$ м/с; b) $v_1 = 0{,}2$ м/с (назад), $v_2 = 0$, $v_3 = v_4 = \dfrac{2\sqrt{57}}{25}v \approx 0{,}60$ м/с, $v_5 = 0{,}48$ м/с.