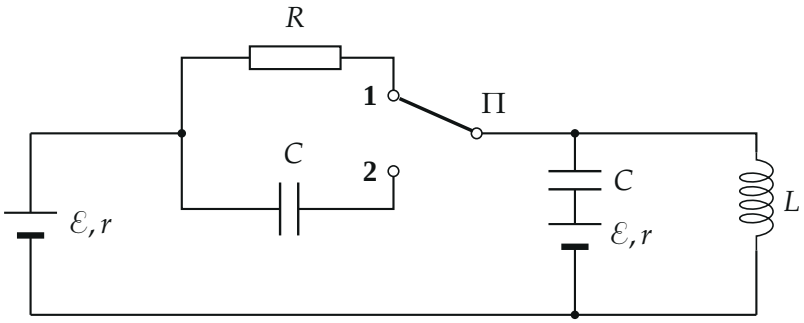
С двумя батарейками

Задача 3. [МОШ 2023/24, заключительный этап, 11 класс, задача 3] В цепи, схема которой изображена на рисунке, представленном ниже, параметры $\mathcal{E}$, L, C известны. Сопротивление соединительных проводов и катушки равно нулю. Внутреннее сопротивление батареи r и сопротивление резистора R удовлетворяют соотношениям

$$r \ll R, \qquad rC \ll \sqrt{LC}, \qquad RC = \sqrt{2LC}.$$

Изначально переключатель П находится в положении 1, при этом в цепи установился стационарный режим. Напряжение на конденсаторе, соединённом с клеммой 2, равно нулю. В момент времени $t = 0$ переключатель мгновенно переводят в положение 2.



a) (6 баллов) Определите, в какой момент времени t_L ток через катушку впервые изменит направление.

b) (2 балла) Какое количество теплоты Q выделится в цепи за очень большое время после перевода ключа в положение 2.

▲ **Решение. Что происходит.** Пока ключ в положении 1, в цепи течёт постоянный ток через резистор и катушку, а правый конденсатор заряжен до $\mathcal{E}$. После переключения резистор отключается, а левый конденсатор C_1 (тот, что у клеммы 2) подключается в цепь. Дальше процесс идёт в два этапа. За короткое время порядка rC заряды двух конденсаторов быстро выравниваются через внутренние сопротивления батарей,

а ток катушки не успевает измениться: катушка «помнит» ток. После этого в контуре из двух батарей, двух конденсаторов и катушки идут почти незатухающие колебания. Главная идея: взять в качестве начальных условий колебаний ток катушки и заряды конденсаторов в конце быстрой стадии; теплоту найти из закона сохранения энергии, не разбирая процесс подробно. Класс задачи — переходный процесс в LC-контуре.

Обозначения. C_1 — левый конденсатор (у клеммы 2), C_2 — правый, заряды их обкладок, соединённых с плюсами батарей, — q_1 и q_2 (рис. 2); I_L — ток через катушку вниз. Узел справа от переключателя обозначим X.

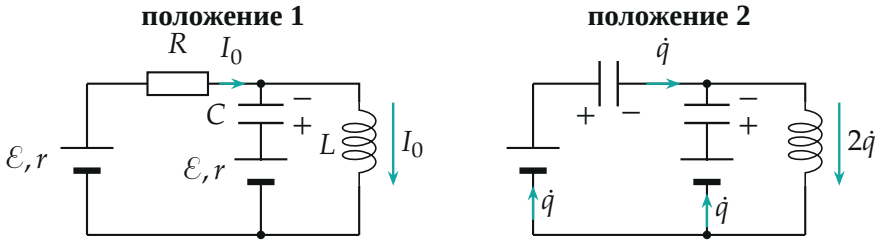


Рис. 2. До переключения: $I_L = I_0$, $q_2 = C\mathcal{E}$, $q_1 = 0$. После быстрой стадии: $q_1 = q_2 = q = \dfrac{C\mathcal{E}}{2}$, токи батарей одинаковы.

Пункт а).

1. До переключения. Катушка идеальная, в стационарном режиме напряжение на ней нулевое, поэтому потенциал узла X равен потенциалу нижней шины, и через батарею, резистор и катушку течёт ток

$$I_0 = \frac{\mathcal{E}}{R + r} \approx \frac{\mathcal{E}}{R} \qquad (r \ll R).$$

Ветвь «конденсатор C_2 плюс батарея» тока не пропускает: напряжение на C_2 равно $\mathcal{E}$, $q_2 = C\mathcal{E}$. Левый конденсатор C_1 ни к чему не подключён, $q_1 = 0$.

2. Быстрая стадия. После переключения катушка сохраняет ток: по закону самоиндукции $L\dfrac{dI_L}{dt} = U_L$, а напряжение на катушке не превышает по порядку $\mathcal{E}$, поэтому за время $\sim rC$ ток меняется на $\sim \dfrac{\mathcal{E}\,rC}{L}$, что

составляет от I_0 долю $\dfrac{R\,rC}{L} = \sqrt{2}\,\dfrac{rC}{\sqrt{LC}} \ll 1$ (использованы $R = \sqrt{2L/C}$ и условие $rC \ll \sqrt{LC}$). Значит, $I_L = I_0$ сразу после переключения. Токи батарей I_1 и I_2 в узле X складываются в ток катушки: $\dot q_1 + \dot q_2 = I_L$, поэтому сумма $q_1 + q_2$ за это время меняется только на $I_0\,rC \ll C\mathcal{E}$ (так как $\dfrac{I_0}{C\mathcal{E}} = \dfrac{1}{RC}$) и остаётся равной $C\mathcal{E}$. А разность уравнивается: оба конденсатора подключены к узлу X и к своим батареям с одинаковой ЭДС, поэтому разность их напряжений равна разности падений на r: $\dfrac{q_1 - q_2}{C} = r(I_2 - I_1)$. Так как $I_1 - I_2 = \dfrac{d(q_1 - q_2)}{dt}$, получаем $\dfrac{d(q_1 - q_2)}{dt} = -\dfrac{q_1 - q_2}{rC}$ — затухание с временем rC (рис. 3, слева). К концу быстрой стадии $q_1 = q_2 = q = \dfrac{C\mathcal{E}}{2}$: напряжение на каждом конденсаторе $\dfrac{\mathcal{E}}{2}$, обкладки у клеммы 2 заряжены отрицательно.

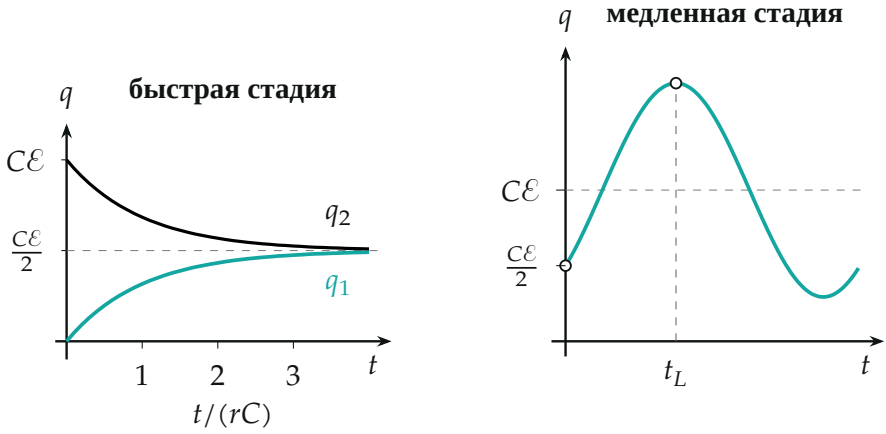


Рис. 3. Заряды конденсаторов: слева — быстрая стадия (время в единицах rC), справа — медленная стадия, колебания заряда $q = q_1 = q_2$.

3. Колебания. Теперь токи батарей одинаковы, $I_1 = I_2 = \dot q$, и через катушку идёт $I_L = 2\dot q$ (рис. 2). Второе правило Кирхгофа для контура

«батарея — C_1 — катушка»:

$$\mathcal{E} - r\dot{q} - \frac{q}{C} - L\frac{dI_L}{dt} = 0 \implies \ddot{q} + \frac{r}{2L}\dot{q} + \frac{q}{2LC} = \frac{\mathcal{E}}{2L}.$$

Затухание идёт за время порядка $\frac{L}{r}$, а период $\sim \sqrt{LC}$; из $rC \ll \sqrt{LC}$ следует $\frac{L}{r} \gg \sqrt{LC}$, поэтому за время до первой смены направления тока r можно отбросить: $\ddot{q} + \omega^2(q - C\mathcal{E}) = 0$, где $\omega^2 = \frac{1}{2LC}$. Нас интересует ток, поэтому продифференцируем: $\ddot{I}_L + \omega^2 I_L = 0$ — гармонические колебания. Начальные условия: $I_L(0) = I_0$ (катушка сохранила ток) и $\dot{I}_L(0) = \frac{U_L(0)}{L}$; напряжение на катушке равно напряжению батареи минус напряжение на C_1: $U_L(0) = \mathcal{E} - \frac{q}{C} = \frac{\mathcal{E}}{2}$, откуда $\dot{I}_L(0) = \frac{\mathcal{E}}{2L}$.

4. Решение. Общее решение $I_L = I_L(0)\cos\omega t + \frac{\dot{I}_L(0)}{\omega}\sin\omega t$. Из $RC = \sqrt{2LC}$ получаем $R = \frac{1}{\omega C}$, $R = 2L\omega$, и

$$\frac{\dot{I}_L(0)}{\omega} = \frac{\mathcal{E}}{2L\omega} = \frac{\mathcal{E}}{R} = I_0.$$

Поэтому

$$I_L(t) = I_0(\cos\omega t + \sin\omega t) = \sqrt{2}\,I_0\sin\Big(\omega t + \frac{\pi}{4}\Big).$$

Ток сначала растёт (катушка получает напряжение $\frac{\mathcal{E}}{2} > 0$) до $\sqrt{2}\,I_0$ при $\omega t = \frac{\pi}{4}$, затем убывает и впервые обращается в нуль, когда $\omega t + \frac{\pi}{4} = \pi$ (рис. 4):

$$t_L = \frac{3\pi}{4\omega} = \frac{3\pi}{4}\sqrt{2LC}.$$

В этот момент заряд q максимален (рис. 3, справа):

$$q = C\mathcal{E}\Big(1 - \frac{\cos(\omega t + \pi/4)}{\sqrt{2}}\Big).$$

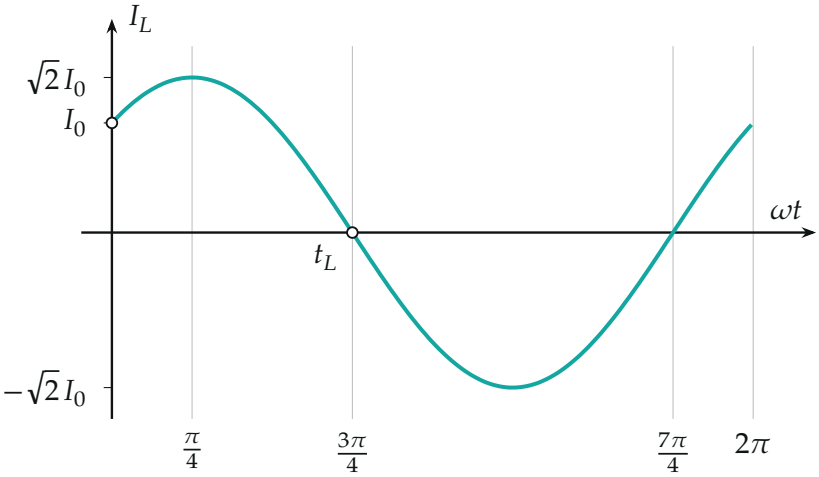


Рис. 4. Ток катушки после переключения: $I_L = I_0(\cos\omega t + \sin\omega t)$*; первое обращение в нуль при* $\omega t_L = \frac{3\pi}{4}$.

Пункт b).

5. Энергия. За всё время после переключения работа батарей идёт на рост энергии конденсаторов и катушки и на тепло в сопротивлениях r (провода и катушка сопротивления не имеют, резистор R отключён):

$$A_{\mathcal{E}} = \Delta W_C + \Delta W_L + Q.$$

Работа батареи — ЭДС на прошедший через неё заряд, а заряд, прошедший через батарею, равен изменению заряда конденсатора в её ветви. Батарея 1 перегоняет заряд q_1 от 0 до $C\mathcal{E}$, батарея 2 — заряд q_2 от $C\mathcal{E}$ к $C\mathcal{E}$, то есть нулевой:

$$A_{\mathcal{E}} = \mathcal{E} \cdot C\mathcal{E} + 0 = C\mathcal{E}^2.$$

В конце стационарный режим: тока катушки нет, оба конденсатора заряжены до $\mathcal{E}$. Энергия конденсаторов выросла с $\dfrac{C\mathcal{E}^2}{2}$ (только C_2) до $2\cdot\dfrac{C\mathcal{E}^2}{2}$, энергия катушки упала с $\dfrac{LI_0^2}{2}=\dfrac{L\mathcal{E}^2}{2R^2}=\dfrac{C\mathcal{E}^2}{4}$ (здесь $\dfrac{L}{R^2}=\dfrac{C}{2}$) до нуля:

$$\Delta W_C=\frac{C\mathcal{E}^2}{2},\qquad \Delta W_L=-\frac{C\mathcal{E}^2}{4}.$$

Тогда

$$Q=C\mathcal{E}^2-\frac{C\mathcal{E}^2}{2}+\frac{C\mathcal{E}^2}{4}=\frac{3C\mathcal{E}^2}{4}.$$

Обратите внимание: теплота не зависит от r — как бы мал ни был r, колебания затухнут, и выделится одно и то же количество теплоты.

Проверка. Размерность: $\sqrt{LC}$ — время, $C\mathcal{E}^2$ — энергия. Второй способ для Q: на быстрой стадии энергия конденсаторов падает с $\dfrac{C\mathcal{E}^2}{2}$ до $2\cdot\dfrac{(C\mathcal{E}/2)^2}{2C}=\dfrac{C\mathcal{E}^2}{4}$, а батареи работы не совершают (одна перегоняет $\dfrac{C\mathcal{E}}{2}$, другая $-\dfrac{C\mathcal{E}}{2}$), поэтому выделяется $\dfrac{C\mathcal{E}^2}{4}$. Колебания затухают целиком, их энергия — $\dfrac{LI_0^2}{2}+\dfrac{x^2}{C}=\dfrac{C\mathcal{E}^2}{4}+\dfrac{C\mathcal{E}^2}{4}$, где $x=q-C\mathcal{E}=-\dfrac{C\mathcal{E}}{2}$ — отклонение заряда от равновесного, а $\dfrac{x^2}{C}$ — энергия двух конденсаторов. Всего $\dfrac{C\mathcal{E}^2}{4}+\dfrac{C\mathcal{E}^2}{2}=\dfrac{3C\mathcal{E}^2}{4}$ — совпало.

Смысл: ток катушки и заряды конденсаторов не прыгают одновременно — катушка держит ток, а конденсаторы быстро перезаряжаются, поэтому всё определяется условиями на границе стадий.

Ответ. a) $t_L=\dfrac{3\pi}{4}\sqrt{2LC}$; b) $Q=\dfrac{3C\mathcal{E}^2}{4}$.