Накачивая шину

Задача 4. [МОШ 2023/24, заключительный этап, 11 класс, задача 4] В задаче рассматривается физическая модель, описывающая некоторые особенности процесса накачивания камеры велосипедного колеса. Объём камеры V_0 считается неизменным. Начальное давление воздуха в камере равно P_0 при температуре окружающей среды T_0. После накачивания воздух в камере должен создавать давление P при той же температуре T_0. Воздух считается идеальным двухатомным газом ($c_V = 2{,}5R$).

a) (6 баллов) В этом пункте камеру соединяют через ниппель с сосудом очень большого объёма V_1 ($V_1 \gg V_0$), который содержит воздух при температуре T_0 и таком давлении $P_{\max}$ ($P_{\max} > P$), что после заполнения камеры и её охлаждения до температуры T_0 давление воздуха в камере становится равно P. Ниппель пропускает воздух в камеру, до тех пор пока давление в ней не сравняется с давлением в сосуде, после этого ниппель закрывается и обратно воздух не выпускает.

«Проталкивание» в камеру порции воздуха из сосуда происходит очень быстро, поэтому можно считать, что процесс «проталкивания» осуществляется без теплообмена между этой порцией и воздухом, остающимся в сосуде, а также между воздухом в камере и окружающей средой. В результате температура и давление воздуха в камере повышаются до значений $P_{\max}$ и $T_{\max}$. Через некоторое время после этого температура воздуха в камере сравнивается с температурой окружающей среды T_0, давление в камере становится равно P.

Считая известными значения $T_0 = 300$ K, $P = 3 \cdot 10^5$ Па и $P_0 = 10^5$ Па, определите $P_{\max}$ и $T_{\max}$.

b) Теперь представим себе, что камера накачивается воздухом при помощи ручного насоса. В начале каждого цикла цилиндр насоса объёмом V_C ($V_C \ll V_0$) заполняется воздухом при атмосферном давлении P_0 и температуре T_0. Пусть в начале i-го цикла давление в камере равно P_{i-1}. На i-м цикле воздух в цилиндре сначала адиабатически сжимается поршнем от давления P_0 до давления P_i, а затем «проталкивается» через ниппель при постоянном давлении P_i без теплообмена, как в пункте а) задачи. После этого открывается впускной клапан, через который в

цилиндр насоса поступает воздух из окружающей среды при давлении P_0, поршень отодвигается в исходное положение, цилиндр заполняется атмосферным воздухом при давлении P_0. На этом цикл заканчивается. Естественно, придётся совершить довольно много ($N \gg 1$) таких циклов «проталкивания» воздуха в камеру, для того чтобы после установления температуры T_0 давление в камере стало равно P. Поскольку накачивание камеры происходит очень быстро, теплообмен между воздухом в камере и окружающей средой начинается уже после окончания работы насоса.

b1) (1 балл) Сколько циклов N необходимо совершить, чтобы накачать камеру? Параметры P_0, P, V_C и V_0 считаются известными.

b2) (3 балла) Какую работу A_i совершает поршень на i-м цикле? Ответ выразите через P_0, P_i и V_C.

b3) (2 балла) Определите изменение давления в камере на i-м цикле ΔP_i, считая P_0, P_i, V_C и V_0 известными.

b4) (2 балла) Для того чтобы найти давление в камере после окончания k-го цикла, используем следующий приём. Соотношение, полученное в предыдущем пункте, можно представить в виде

$$\frac{\Delta P_i}{f(P_i)} = \alpha,$$

где $f(P_i)$ — некоторая функция P_i, α — коэффициент, не зависящий от P_i (α и $f(P_i)$ вам известны, если вы сделали пункт b3). Просуммируем выражения, даваемые этой формулой, от $i = 1$ до $i = k$:

$$\sum_{i=1}^{k} \frac{\Delta P_i}{f(P_i)} = \alpha \cdot k.$$

Суммирование в этой формуле можно приближённо заменить на интегрирование:

$$\sum_{i=1}^{k} \frac{\Delta P_i}{f(P_i)} \approx \int_{P_0}^{P_k} \frac{dP}{f(P)}.$$

Определите давление P_k в камере после k-го цикла. Параметры P_0, V_C,

V_0 и k считаются известными.

b5) (1 балл) Вычислите $P_{\max}$ и $T_{\max}$, считая известными значения параметров $T_0 = 300$ К, $P = 3 \cdot 10^5$ Па и $P_0 = 10^5$ Па.

Указание. Значение определённого интеграла от степенной функции даётся формулой

$$\int_{a_1}^{a_2} \frac{dx}{x^k} = \frac{1}{k-1}\left(\frac{1}{a_1^{k-1}} - \frac{1}{a_2^{k-1}}\right).$$

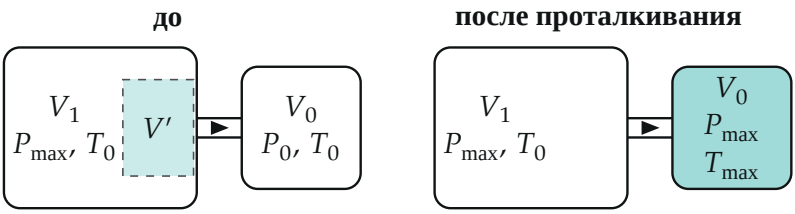


Рис. 1. Поясняющий рисунок к пункту а): порция воздуха объёмом V' в сосуде (выделена) проталкивается в камеру; вертикальные размеры не в масштабе.

▲ **Решение.** **Что происходит.** Воздух проталкивают без теплообмена: работа идёт во внутреннюю энергию, он нагревается, потом остывает до T_0 при постоянном объёме. Главная идея: закон сохранения энергии для одного и того же воздуха — «воздух камеры плюс проталкиваемая порция», — причём $U = \frac{5}{2}\nu RT = \frac{5}{2}PV$ для двухатомного газа при любой температуре.

Обозначения. ν — количество воздуха в камере в начале, $\Delta\nu$ — добавленное; V' — объём порции при проталкивании.

Пункт а).

1. Сколько воздуха и какая работа. Конечное состояние при T_0: $PV_0 = (\nu + \Delta\nu)RT_0$, начальное: $P_0V_0 = \nu RT_0$; вычитаем: $\Delta\nu\, RT_0 = (P - P_0)V_0$. Давление в огромном сосуде остаётся $P_{\max}$ и проталкивает порцию, занимавшую в сосуде объём $V' = \dfrac{\Delta\nu RT_0}{P_{\max}}$ (рис. 1). Работа над порцией $A = P_{\max}V' = \Delta\nu\, RT_0 = (P - P_0)V_0$.

Обратите внимание: это работа давления окружающего порцию воздуха в сосуде, а не работа сжатия воздуха в камере; от $P_{\max}$ она не зависит.

2. Закон сохранения энергии. Система — весь воздух, который окажется в камере ($\nu + \Delta\nu$). Тепла нет, поэтому работа A идёт на изменение внутренней энергии: в начале весь воздух при T_0, в конце при $T_{\max}$:

$$(P - P_0)V_0 = \frac{5}{2}(\nu + \Delta\nu)R\,(T_{\max} - T_0) = \frac{5}{2}\frac{PV_0}{T_0}(T_{\max} - T_0)$$

(использовано $(\nu + \Delta\nu)R = PV_0/T_0$), откуда

$$T_{\max} = T_0\Big(1 + \frac{2}{5}\cdot\frac{P - P_0}{P}\Big) = 300\Big(1 + \frac{2}{5}\cdot\frac{2}{3}\Big)\ \text{К} = 380\ \text{К}.$$

3. Давление. После проталкивания камера закрыта, объём постоянный, поэтому (закон Шарля, $P \propto T$ при $V = \text{const}$ и неизменном количестве воздуха) $\dfrac{P_{\max}}{T_{\max}} = \dfrac{P}{T_0}$, и $P_{\max} = P\dfrac{T_{\max}}{T_0} = 3\cdot 10^5\cdot\dfrac{380}{300}$ Па $= 3{,}8\cdot 10^5$ Па. Второй способ: порция вносит в камеру на моль $c_pT_0 = c_VT_0 + RT_0$ (энергия плюс работа проталкивания), и $\Delta\nu c_pT_0 + \nu c_VT_0 = (\nu + \Delta\nu)c_VT_{\max}$ даёт тот же $T_{\max}$.

Пункт b).

4. b1) Число циклов. Цикл вносит $\Delta\nu_C = \dfrac{P_0V_C}{RT_0}$ молей, всего нужно $\Delta\nu = \dfrac{(P - P_0)V_0}{RT_0}$ (шаг 1), поэтому $N = \dfrac{\Delta\nu}{\Delta\nu_C} = \dfrac{(P - P_0)V_0}{P_0V_C}$.

5. b2) Работа поршня. Воздух цилиндра, $\nu_C = \dfrac{P_0V_C}{RT_0}$ молей, сначала сжимается адиабатически от P_0 до P_i (рис. 2, переход 1→2): работа поршня идёт на внутреннюю энергию. Из уравнения адиабаты ($\gamma = \dfrac{7}{5}$): $T' = T_0(\dfrac{P_i}{P_0})^{2/7}$ и $V' = V_C(\dfrac{P_0}{P_i})^{5/7}$: $A_{\text{ад}} = \Delta U = \dfrac{5}{2}P_0V_C\Big[\Big(\dfrac{P_i}{P_0}\Big)^{2/7} - 1\Big]$. Вторая часть — проталкивание при постоянном давлении P_i (переход 2→3): $A_P = P_iV' = P_i^{2/7}P_0^{5/7}V_C$.

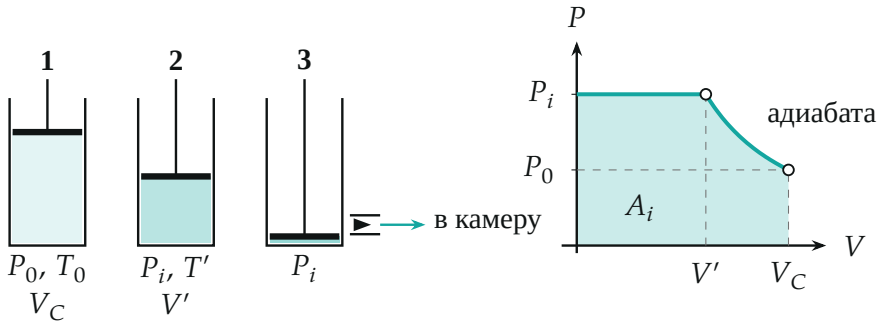


Рис. 2. Цикл насоса: 1 — цилиндр заполнен (P_0, T_0, V_C); 2 — адиабатическое сжатие до P_i (объём уменьшился до V', воздух нагрелся до T'); 3 — проталкивание в камеру при P_i. Справа — цикл воздуха насоса; площадь под ним — работа A_i.

Складываем:

$$A_i = A_{\text{ад}} + A_P = \frac{7}{2} P_i^{2/7} P_0^{5/7} V_C - \frac{5}{2} P_0 V_C.$$

6. b3) Приращение давления. Закон сохранения энергии для воздуха камеры вместе с порцией из цилиндра: тепла нет, работа поршня равна приращению внутренней энергии, а $U = \frac{5}{2}PV$ не зависит от температуры. В начале цикла $U = \frac{5}{2}(P_{i-1}V_0 + P_0 V_C)$, в конце $\frac{5}{2}P_i V_0$; с A_i из шага 5 слагаемые $\frac{5}{2}P_0 V_C$ сокращаются:

$$\frac{5}{2} V_0 \,(P_i - P_{i-1}) = \frac{7}{2} P_i^{2/7} P_0^{5/7} V_C \quad \Rightarrow \quad \Delta P_i = \frac{7}{5} P_i^{2/7} P_0^{5/7} \frac{V_C}{V_0}.$$

7. b4) Давление после k-го цикла. Приращение ΔP_i мало по сравнению с P_i ($V_C \ll V_0$), поэтому сумма заменяется интегралом. Здесь $f(P) = P^{2/7}$, $\alpha = \frac{7}{5} P_0^{5/7} \frac{V_C}{V_0}$:

$$\int_{P_0}^{P_k} \frac{dP}{P^{2/7}} = \frac{7}{5}\left(P_k^{5/7} - P_0^{5/7}\right) = \frac{7}{5} P_0^{5/7} \frac{V_C}{V_0} k \quad \Rightarrow \quad P_k = P_0\left(1 + \frac{V_C}{V_0} k\right)^{7/5}.$$

8. b5) Максимальное давление и температура. После N циклов давление достигает $P_{\max} = P_N$. Так как $\frac{V_C}{V_0}N = \frac{P - P_0}{P_0}$ (b1), $P_{\max} = P_0(\frac{P}{P_0})^{7/5} = 10^5 \cdot 3^{1{,}4}$ Па $\approx 4{,}7 \cdot 10^5$ Па. Остывание в закрытой камере изохорное, как в шаге 3: $T_{\max} = T_0\frac{P_{\max}}{P} = 300\text{ K} \cdot \frac{4{,}66}{3} \approx 466$ K.

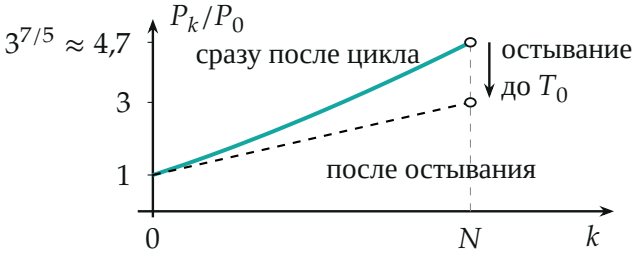


Рис. 3. Давление в камере по мере накачивания: бирюзовая кривая — сразу после цикла (воздух горячий), пунктир — то, к чему приведёт остывание до T_0 (давление пропорционально числу молей).

Проверка. Размерность: $P_i^{2/7}P_0^{5/7}V_C$ — работа. Предел малой порции: $\Delta P_1 \approx \frac{7}{5}P_0\frac{V_C}{V_0}$ — множитель $\gamma = \frac{7}{5}$ говорит, что воздух в закрытой камере сжимается адиабатически (изотермически было бы $P_0\frac{V_C}{V_0}$). Второй способ для b4: это уравнение адиабаты для всего воздуха, сжатого от $V_0 + kV_C$ до V_0, $P_kV_0^{7/5} = P_0(V_0 + kV_C)^{7/5}$: порция и воздух камеры сжаты адиабатически до одного давления, их температуры равны, и смешивание обратимо.

Смысл: насос совершает над воздухом больше работы, $\frac{5}{2}(P_{\max} - P)V_0 \approx 4{,}1\,P_0V_0$ против $2P_0V_0$ у сосуда, поэтому воздух нагревается сильнее: 466 K против 380 K.

Ответ. a) $T_{\max} = 380$ K, $P_{\max} = 3{,}8 \cdot 10^5$ Па; b1) $N = \frac{(P-P_0)V_0}{P_0V_C}$; b2) $A_i = \frac{7}{2}P_i^{2/7}P_0^{5/7}V_C - \frac{5}{2}P_0V_C$; b3) $\Delta P_i = \frac{7}{5}P_i^{2/7}P_0^{5/7}\frac{V_C}{V_0}$; b4) $P_k = P_0(1 + \frac{V_C}{V_0}k)^{7/5}$; b5) $P_{\max} = P_0(\frac{P}{P_0})^{7/5} \approx 4{,}7 \cdot 10^5$ Па, $T_{\max} = T_0\frac{P_{\max}}{P} \approx 466$ K.