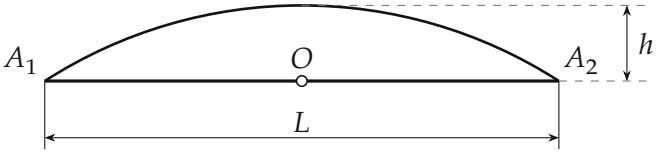
Цилиндрическая линза

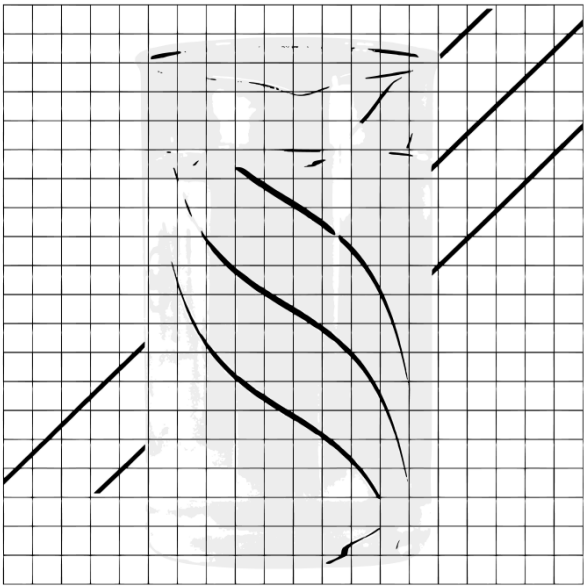
Задача 5. [МОШ 2023/24, заключительный этап, 11 класс, задача 5] Если цилиндр из стекла с показателем преломления n разрезать по плоскости, параллельной оси цилиндра, то получится цилиндрический сегмент, который с оптической точки зрения представляет собой цилиндрическую линзу. Если толщина этой линзы h (см. рисунок) мала по сравнению с её шириной L и радиусом кривизны выпуклой поверхности R, то можно говорить о тонкой цилиндрической линзе. Для такой линзы поперечное увеличение имеет разные значения в разных направлениях. В направлении вдоль оси O поперечное увеличение равно 1, иначе говоря, размеры предмета и изображения вдоль этой оси одинаковые. Осью O мы называем прямую, параллельную оси исходного цилиндра, проходящую через середину хорды A_1A_2 (см. рисунок).



a) (3 балла) Пусть на плоскую сторону тонкой цилиндрической линзы падает параллельный пучок света круглого сечения. Ось пучка перпендикулярна плоской поверхности линзы и пересекает ось O линзы. Радиусы пучка и выпуклой поверхности линзы равны r и R соответственно, показатель преломления материала линзы равен $n = \frac{4}{3}$. За линзой на расстоянии $2R$ от неё располагается экран, параллельный плоскости линзы. Определите площадь светлого пятна на экране. Все лучи пучка проходят через линзу.

b) (7 баллов) Тонкостенная мензурка диаметром 80 мм (толщиной стенок можно пренебречь) заполнена водой (показатель преломления равен 1,33) и стоит на горизонтальном столе на неизвестном расстоянии от вертикальной стены. На стене закреплён лист, на котором изображены три прямые параллельные линии. Их наблюдают через мензурку. Используя фотографию, приведённую ниже (увеличенный вариант см. на

дополнительном листе), определите расстояние от оси мензурки до стены.



Ось объектива фотоаппарата при фотографировании старались ориентировать перпендикулярно стене. В процессе обработки в графическом редакторе фотографию обрезали, поверх изображения была нанесена сетка.

▲ **Решение.** **Что происходит.** Цилиндрическая линза преломляет свет только в плоскости, перпендикулярной оси цилиндра: вдоль оси O размеры не меняются. Поэтому ход лучей разбираем в сечении, перпендикулярном оси. В пункте b) мензурка с водой — толстая цилиндрическая линза: по изменению наклона линий на фото находится её горизонтальное увеличение, а по нему — расстояние до стены.

Обозначения. x — поперёк оси O, z — вдоль неё; y — высота луча, u — малый угол луча с осью.

Пункт а).

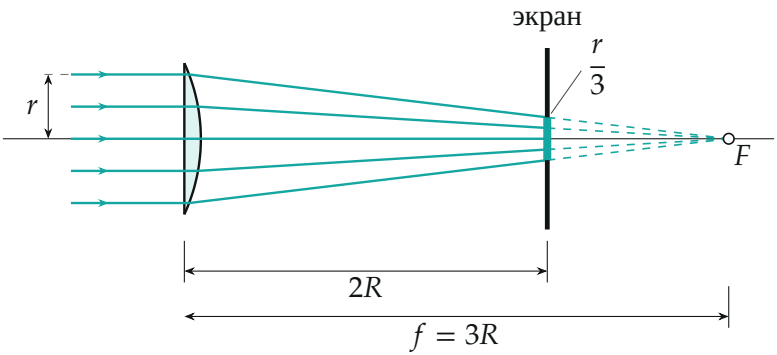


Рис. 1. Пункт а): ход параллельных лучей в сечении, перпендикулярном оси O (вертикальный масштаб растянут; $n = \frac{4}{3}, f = 3R$). Бирюзовым выделено пятно на экране; пунктир — продолжение до фокуса F.

1. Фокусное расстояние. Луч на высоте y идёт параллельно оси и падает на плоскую грань по нормали — не преломляется. На выпуклой поверхности нормаль наклонена к оси на малый угол $\alpha = \frac{y}{R}$ (рис. 1), угол преломления $\beta = n\alpha$ (закон Снеллиуса для малых углов). Луч отклоняется к оси на угол $\delta = \beta - \alpha = (n-1)\frac{y}{R}$, пропорциональный высоте, и пересекает ось на одном для всех лучей расстоянии — фокусном (линза тонкая, отсчитываем от неё):

$$f = \frac{y}{\delta} = \frac{R}{n-1} = 3R.$$

2. Пятно на экране. Луч высоты y на расстоянии $2R$ от линзы находится на высоте $y' = y\left(1 - \frac{2R}{f}\right) = \frac{y}{3}$, то есть поперёк оси размер пучка сжался в три раза (экран стоит до фокуса, лучи ещё не пересеклись). Вдоль оси O размер не изменился. Значит, круг радиуса r превращается в эллипс с полуосями r (вдоль O) и $\frac{r}{3}$ (поперёк), рис. 2. Площадь эллипса $S = \pi ab = \pi r \cdot \frac{r}{3} = \frac{\pi r^2}{3}$.

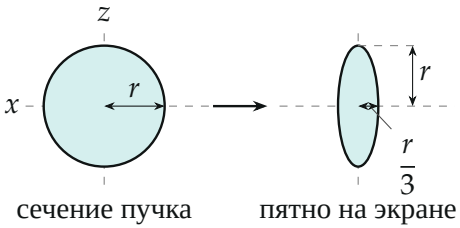


Рис. 2. Сечение пучка (круг) и пятно на экране (эллипс): поперёк оси O размер уменьшился втрое, вдоль неё не изменился.

Пункт b).

3. Что даёт наклон линий. Ось мензурки вертикальна, поэтому через неё горизонтальные размеры умножаются на $-\Gamma_0$ (изображение перевёрнуто, наклон зеркальный), а вертикальные не меняются. Линия с наклоном $\tan\theta = \dfrac{dy}{dx}$ в изображении имеет $|\tan\theta'| = \dfrac{dy}{\Gamma_0\,dx}$, откуда $\Gamma_0 = \dfrac{\tan\theta}{|\tan\theta'|}$. Измерим по фотографии. Линии на стене идут по диагоналям клеток, $\tan\theta = 1$. Вдали от оси изображение искажено, поэтому берём наклон касательной у оси мензурки: по точкам средней линии, снятым с фотографии (рис. 3), на 8 клеток по горизонтали линия поднимается на 5, $|\tan\theta'| = \dfrac{5}{8}$, откуда $\Gamma_0 = \dfrac{8}{5}$.

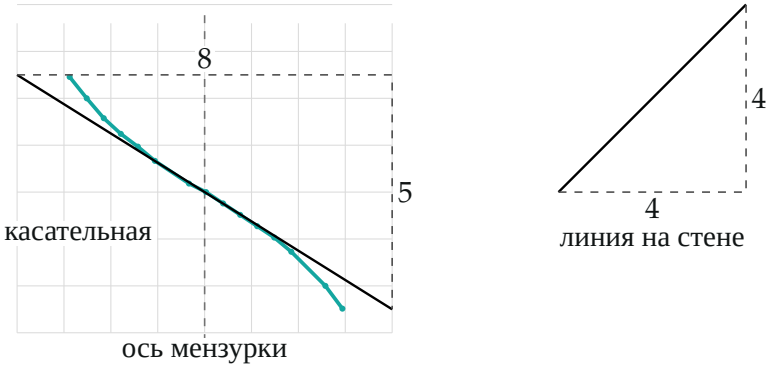


Рис. 3. Средняя линия в изображении у оси мензурки (бирюзовые точки по фотографии, единицы — клетки сетки): касательная имеет наклон $5/8$ (слева); линия на стене — наклон 1 (справа).

4. Мензурка как линза. Для лучей у оси мензурки (радиус $R = 40$ мм, вода $n = \frac{4}{3}$) рассмотрим луч в сечении: высота y, угол u с осью (ось — горизонталь, проходящая через центр). На передней поверхности (выпуклой к предмету) $nu_1 = u_0 - (n-1)\frac{y_1}{R}$; в воде луч проходит $2R$: $y_2 = y_1 + 2Ru_1$; на задней поверхности $u_2 = nu_1 - (n-1)\frac{y_2}{R}$. При $n = \frac{4}{3}$:

$$y_2 = \frac{y_1}{2} + \frac{3R}{2}\,u_0, \qquad u_2 = \frac{u_0}{2} - \frac{y_1}{2R}.$$

Предмет (линия на стене) на расстоянии a от передней поверхности, высота точки h_0: луч выходит из неё под углом u_0 на высоте $y_1 = h_0 + au_0$. Изображение — на расстоянии s за задней поверхностью, на высоте $y_2 + su_2$. Это не зависит от угла u_0 (все лучи из точки собираются в одну), когда множитель при u_0 равен нулю:

$$\frac{a}{2} + \frac{3R}{2} + s\Big(\frac{1}{2} - \frac{a}{2R}\Big) = 0 \;\Rightarrow\; s = \frac{R\,(a+3R)}{a-R},$$

а множитель при h_0 — это увеличение: $\Gamma = \frac{1}{2} - \frac{s}{2R} = -\frac{2R}{a-R}$. Знак «минус» — изображение перевёрнуто; по модулю $\Gamma_0 = \frac{2R}{|a-R|}$.

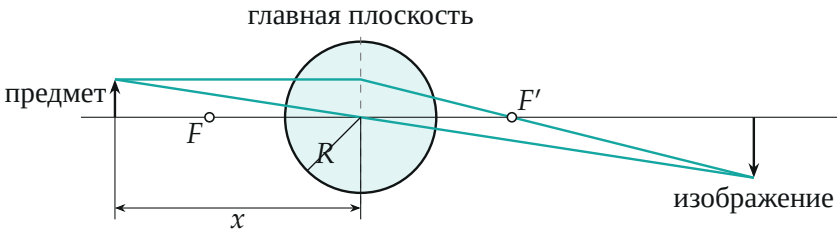


Рис. 4. Мензурка как линза с фокусным расстоянием $f = 2R$ и главной плоскостью через ось; ход двух лучей из верхней точки предмета ($x = \frac{13}{4}R, \Gamma_0 = \frac{8}{5}$).

5. Расстояние до стены. Уравнение $\frac{2R}{|a-R|} = \frac{8}{5}$ даёт $a - R = \pm\frac{5R}{4}$, то есть $a = \frac{9}{4}R$ или $a = -\frac{R}{4}$. Отрицательное a означало бы, что предмет

внутри мензурки, — не подходит. Расстояние от оси до стены $x = R + a$:

$$x = R + \frac{9}{4}R = \frac{13}{4}R = \frac{13}{4} \cdot 40 \text{ мм} = 130 \text{ мм}.$$

Погрешность: Γ_0 определена в пределах $1{,}5 \dots 1{,}7$, откуда x от 127 до 133 мм — укладывается в допуск (120 ± 15) мм.

Обратите внимание: для измерения берутся наклоны *касательных у оси*; наклоны на краю мензурки дают другое «увеличение» — там параксиальное приближение не работает.

Проверка. При $a \to \infty$ по формулам шага 4 выходящий луч пересекает ось на R за мензуркой: $f = 2R$ от оси, как у шара, $f = \dfrac{nR}{2(n-1)}$. Линза с $f = 2R$ и главной плоскостью через ось даёт $\Gamma_0 = \dfrac{f}{x - f}$ — та же формула (рис. 4, второй способ); с $n = 1{,}33$: $f = 80{,}6$ мм, $x = f(1 + 1/\Gamma_0) = 131$ мм. Пункт а): $S = \pi r^2 |1 - 2(n-1)|$ — при $n = 1$ круг, при $n = \frac{3}{2}$ экран в фокусе, пятно — отрезок.

Смысл: цилиндр меняет масштаб только поперёк своей оси, поэтому наклон линий меняется — по нему и измеряется расстояние.

Ответ. а) $S = \dfrac{\pi r^2}{3}$; b) $x = \dfrac{13}{4}R = 130$ мм (принимается (120 ± 15) мм).