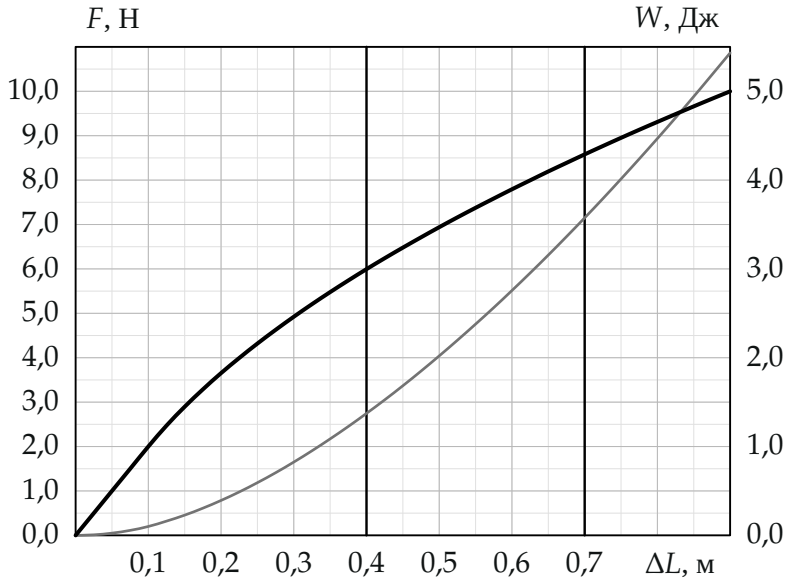
Нелинейный шнур

Задача 6. [МОШ 2023/24, заключительный этап, 11 класс, задача 6] Графики зависимостей $F(\Delta L)$ и $W(\Delta L)$ упругой силы и энергии деформации нелинейного резинового шнура от его удлинения ΔL изображены на рисунке, представленном ниже. Зависимости $F(\Delta L)$ соответствует чёрная линия увеличенной толщины, при этом значения считываются с левой шкалы. Зависимости $W(\Delta L)$ соответствует серая линия, значения считываются со шкалы справа.



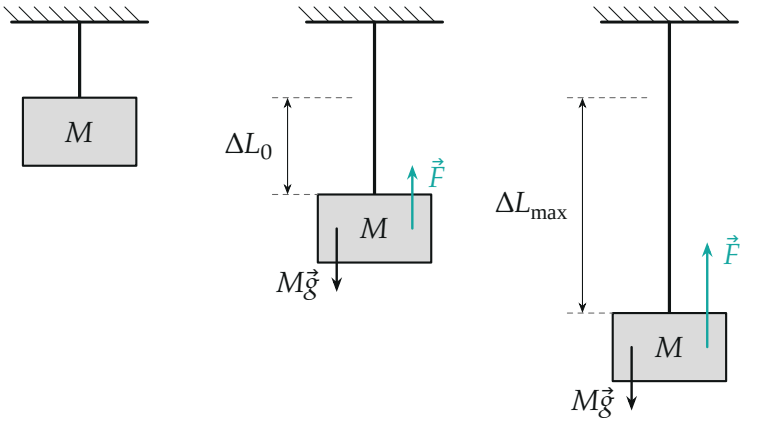
Пусть один конец шнура закреплён на потолке, а к другому концу присоединён груз массой M. Сначала шнур имеет форму прямой линии, не провисает, но и не деформирован, груз удерживается внешней силой. В некоторый момент времени груз освобождают. Найдите максимальное удлинение шнура ΔL_{max}, равновесное удлинение ΔL_0, устанавливающееся спустя длительное время после начала процесса, когда колебания прекращаются, а также период T малых колебаний груза на шнуре вблизи положения равновесия для двух значений массы M.

А. (2 балла) $M = 0{,}1$ кг;

Б. (4 балла) $M = 0{,}6$ кг.

Ускорение свободного падения равно 10 м/с^2.

▲ **Решение. Что происходит.** Шнур работает как нелинейная пружина: сила F и запасённая энергия W заданы графиками. Груз отпускают без скорости при недеформированном шнуре. Пока $F < Mg$, груз разгоняется вниз; после положения равновесия сила упругости больше Mg, груз тормозится и в нижней точке останавливается, потом идёт вверх. Потерь энергии нет, поэтому движение — колебания между $\Delta L = 0$ и $\Delta L_{\max}$; со временем они затухают, и груз останавливается в положении равновесия ΔL_0. Три вопроса — три разные идеи: равновесие — равенство сил, наибольшее растяжение — энергия, период — жёсткость шнура вблизи равновесия.



а) начало: шнур не растянут

б) равновесие

в) нижняя точка

Три положения груза: начальное, равновесное и нижнее (длина шнура l произвольна, ось направлена вниз).

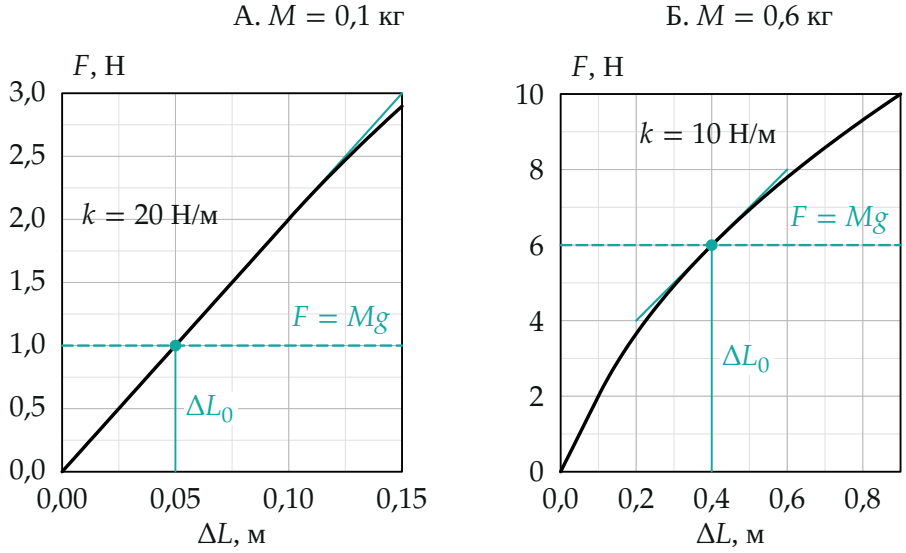
Обозначения. ΔL — удлинение шнура, оно же смещение груза вниз от начального положения; шнур считаем лёгким, $g = 10$ м/с^2.

1. Равновесное удлинение. В положении равновесия ускорение груза равно нулю. Запишем второй закон Ньютона для груза в проекции на

вертикальную ось: тяжесть $M\vec{g}$ направлена вниз, сила упругости $\vec{F}$ — вверх, откуда

$$F(\Delta L_0) = Mg.$$

Это уравнение решается по графику $F(\Delta L)$: проводим горизонталь на уровне Mg до пересечения с кривой (рис. 3). В случае А $Mg = 1$ Н, в случае Б $Mg = 6$ Н.



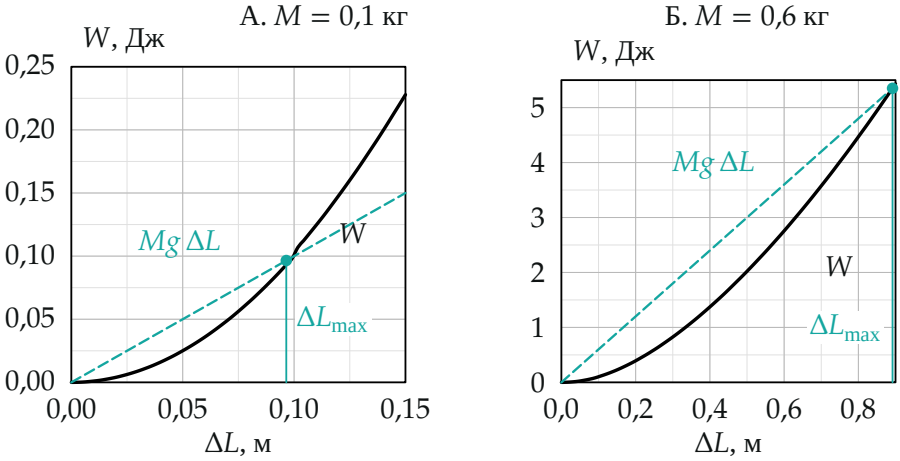
Равновесие: $F = Mg$. Бирюзовая пунктирная линия — уровень Mg; бирюзовая сплошная прямая — касательная к $F(\Delta L)$ в точке равновесия, её наклон k.

Читаем: А — $\Delta L_0 \approx 0{,}05$ м; Б — $\Delta L_0 \approx 0{,}40$ м.

2. Наибольшее растяжение. В верхней начальной точке и в нижней точке скорость груза равна нулю. Применим закон сохранения механической энергии для системы «груз + шнур» между этими двумя состояниями: потенциальная энергия груза уменьшается на $Mg\,\Delta L_{\max}$, энергия деформации шнура увеличивается на $W(\Delta L_{\max})$, кинетическая не меняется. Энергию берём с графика W потому, что сила F непостоянна и работу пришлось бы считать как площадь под кривой. Получаем уравнение

$$W(\Delta L_{\max}) = Mg\,\Delta L_{\max}.$$

Его решение — точка пересечения кривой $W(\Delta L)$ и прямой $Mg\,\Delta L$ (рис. 4); пересечение в нуле соответствует начальному положению, нужна вторая точка.



Энергетическое построение: кривая $W(\Delta L)$ и прямая $Mg\,\Delta L$ (А: наклон 1 Дж/м, Б: 6 Дж/м).

Читаем: А — $\Delta L_{max} \approx 0{,}10$ м; Б — $\Delta L_{max} \approx 0{,}89$ м.

Обратите внимание: $\Delta L_{max} = 2\Delta L_0$ верно только для линейной пружины. В случае А шнур линеен на всём пути ($F = 20\,\Delta L$ до 0,1 м), и действительно $0{,}10 = 2 \cdot 0{,}05$. В случае Б шнур по мере растяжения становится мягче (наклон кривой F уменьшается), поэтому он растягивается дальше, чем линейная пружина: 0,89 м, а не $2 \cdot 0{,}40 = 0{,}80$ м.

3. Период малых колебаний. Сместим груз от равновесия на малое x вниз. Второй закон Ньютона: $Ma = Mg - F(\Delta L_0 + x)$. Разложим силу упругости вблизи равновесия, учитывая $F(\Delta L_0) = Mg$:

$$F(\Delta L_0 + x) \approx Mg + kx, \qquad k = \left.\frac{dF}{d\Delta L}\right|_{\Delta L_0},$$

где k — наклон касательной к графику F в точке равновесия. Тогда $Ma =$

$-kx$ — гармонические колебания с периодом

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{M}{k}}.$$

Это справедливо, пока x мало настолько, что кривая заменяется касательной.

Найдём k по касательным на рис. 3. В случае А кривая — прямая от начала координат до 0,1 м: $k = 2\ \text{Н}/0{,}1\ \text{м} = 20\ \text{Н/м}$. В случае Б касательная в точке $\Delta L_0 = 0{,}40$ м поднимается на 1 Н на каждые 0,1 м: $k \approx 10$ Н/м. Периоды:

$$T_\text{А} = 2\pi\sqrt{\frac{0{,}1}{20}} \approx 0{,}44\ \text{с}, \qquad T_\text{Б} = 2\pi\sqrt{\frac{0{,}6}{10}} \approx 1{,}54\ \text{с}.$$

Обратите внимание: в случае Б размах колебаний между 0 и 0,89 м не мал, и их период отличается от $T_\text{Б}$; формула описывает только малые колебания вблизи положения равновесия, о которых и спрашивает задача.

Проверка. Размерность: $\sqrt{\text{кг}/(\text{Н}/\text{м})} = \sqrt{\text{кг}\cdot\text{м}/\text{Н}} = \sqrt{\text{с}^2} = \text{с}$. Случай А проверяется выкладкой: при $F = 20\,\Delta L$ энергия $W = 10\,\Delta L^2$, уравнение $10\,\Delta L^2 = \Delta L$ даёт $\Delta L_\text{max} = 0{,}10$ м, что совпадает с чтением графика. Случай Б — вторым способом: площадь под кривой F до 0,89 м, то есть работа шнура, равна $\approx 5{,}3$ Дж и совпадает с работой тяжести $6 \cdot 0{,}89 \approx 5{,}3$ Дж. Физический смысл: тяжёлый груз вытягивает шнур в более мягкую область ($k = 10$ Н/м вместо 20 Н/м); масса больше в 6 раз, жёсткость меньше в 2 раза, период растёт в $\sqrt{12} \approx 3{,}5$ раза: $1{,}54/0{,}44 \approx 3{,}5$.

Ответ. А. $\Delta L_0 \approx 0{,}05$ м, $\Delta L_\text{max} \approx 0{,}10$ м, $T \approx 0{,}44$ с; Б. $\Delta L_0 \approx 0{,}40$ м, $\Delta L_\text{max} \approx 0{,}89$ м, $T \approx 1{,}54$ с.