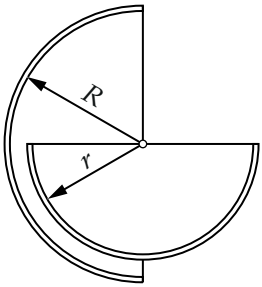
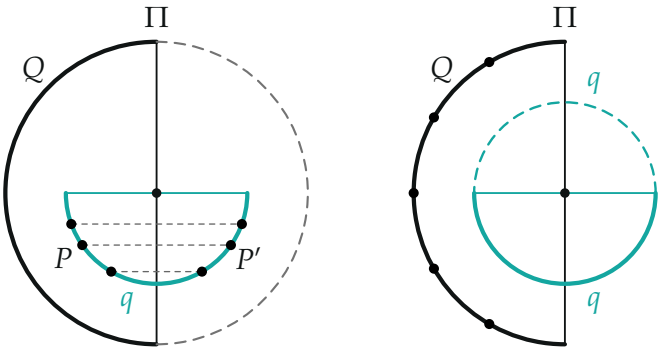
# Полусферы

**Задача 7.** [МОШ 2023/24, заключительный этап, 11 класс, задача 7] Имеются две диэлектрические равномерно заряженные полусферы с радиусами $R$ и $r$ и зарядами $Q$ и $q$ соответственно. Полусферы имеют общий центр и расположены относительно друг друга так, что плоскость, закрывающая одну полусферу, перпендикулярна плоскости, закрывающей другую полусферу (см. рисунок). Найдите энергию электростатического взаимодействия полусфер.




▲ **Решение.** **Что происходит.** Энергия взаимодействия двух заряженных тел — сумма $k\,dq_1\,dq_2/\ell$ по всем парам элементов, и прямо её не сосчитать: потенциал одной полусферы в произвольной точке выражается сложно. Выручает симметрия: потенциал *целой* сферы внутри постоянен, а малая полусфера зеркально симметрична относительно плоскости среза большой. Главная идея — достроить большую полусферу до сферы и разбить малую полусферу на пары зеркальных точек.

**Обозначения.** $k = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}$; $O$ — общий центр; $\Pi$ — плоскость среза большой полусферы (на рисунке — вертикальная); $\varphi_Q(P)$ — потенциал, который создаёт в точке $P$ одна большая полусфера. Заряды закреплены на диэлектриках и не перераспределяются, поэтому $W = \int \varphi_Q\,dq$ по малой полусфере — энергия малой полусферы в поле большой.

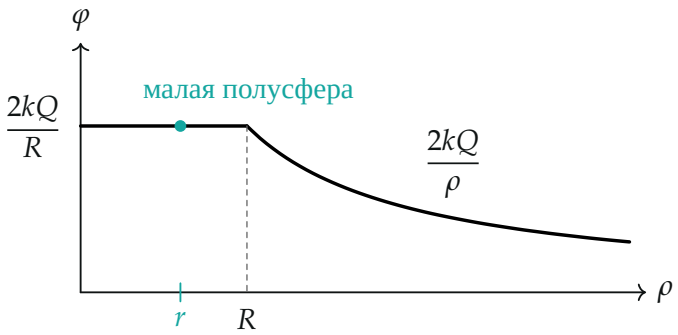



*Слева — пары зеркальных относительно* П *точек* $P$, $P'$ *на малой полусфере (достроенная половина большой сферы — пунктиром). Справа — второй способ: малая сфера достроена до целой, точки большой полусферы одинаково удалены от центра.*

**1. Потенциал целой сферы внутри.** Достроим большую полусферу до сферы радиуса $R$: добавим вторую половину — зеркальную копию первой относительно П с таким же зарядом $Q$. Полный заряд сферы $2Q$. Поле внутри равномерно заряженной сферы равно нулю (теорема Гаусса и симметрия), значит, потенциал внутри постоянен, и он равен значению в центре: все элементы сферы находятся от центра на расстоянии $R$, поэтому

$$\varphi_{\text{сф}} = \frac{2kQ}{R} \quad \text{во всех точках внутри сферы}$$

(рис. 3). Малая полусфера лежит внутри большой сферы ($r < R$).



*Потенциал равномерно заряженной сферы радиуса $R$ и заряда $2Q$: внутри постоянен, снаружи убывает как у точечного заряда.*

**2. Зеркальные точки.** Возьмём точку $P$ малой полусферы и точку $P'$, симметричную ей относительно $\Pi$. Малая полусфера при этом отражении переходит в себя — её плоскость среза перпендикулярна $\Pi$ — и заряжена равномерно, поэтому $P'$ тоже лежит на ней и несёт такой же заряд $dq$. В точке $P$ потенциал сферы складывается из потенциалов двух половин: настоящей, $\varphi_Q(P)$, и достроенной. Достроенная половина — зеркальное отражение настоящей, поэтому её потенциал в $P$ равен потенциалу настоящей в $P'$. Отсюда

$$\varphi_Q(P) + \varphi_Q(P') = \varphi_{\text{сф}} = \frac{2kQ}{R}.$$

**3. Энергия.** Разобьём малую полусферу на пары зеркальных элементов с зарядами $dq$ каждый; пары покрывают всю полусферу, а их суммарный заряд, считая по одному элементу от пары, равен $q/2$. Энергия одной пары в поле большой полусферы

$$dq\,\varphi_Q(P) + dq\,\varphi_Q(P') = \frac{2kQ}{R}\,dq.$$

Суммируем по всем парам от начала до конца разбиения:

$$W = \frac{2kQ}{R}\sum dq = \frac{2kQ}{R}\cdot\frac{q}{2} = \frac{kQq}{R}.$$

Обратите внимание: потенциал *одной* полусферы внутри не постоянен — постоянен только потенциал целой сферы. Для полусферы справедливо лишь то, что на плоскости среза $\Pi$ он равен $kQ/R$ (половина от $2kQ/R$ по симметрии), и сумма значений в зеркальных точках постоянна. Ответ от радиуса $r$ не зависит.

**Второй способ.** Достроим малую полусферу до целой сферы радиуса $r$ и заряда $2q$ (на рисунке справа пунктир). Все точки большой полусферы находятся от центра на расстоянии $R > r$, поэтому потенциал малой сферы там одинаков и равен $2kq/R$ (снаружи сфера действует как точечный заряд в центре). Энергия большой полусферы в поле целой малой

сферы равна $Q \cdot 2kq/R$. Эта энергия — сумма двух: взаимодействия с нижней малой полусферой (искомое $W$) и с верхней достроенной. Большая полусфера симметрична относительно плоскости среза малой, поэтому обе энергии равны. Значит $2W = 2kQq/R$, то есть $W = kQq/R$ — тот же результат.

**Проверка.** Размерность: $kQq/R$ — энергия кулоновского вида. Предел: при $r \to 0$ малая полусфера стягивается в точечный заряд $q$ в центре, где потенциал большой полусферы равен $kQ/R$ (все её элементы на расстоянии $R$): энергия $q\,kQ/R$ — как в ответе. Совпадение для всех $r$ и есть следствие симметрии: ответ не зависит от радиуса малой полусферы. При заряде $Q$ и $q$ одного знака энергия положительна (отталкивание), разных — отрицательна.

**Ответ.** $W = \dfrac{kQq}{R}$, где $k = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}$.