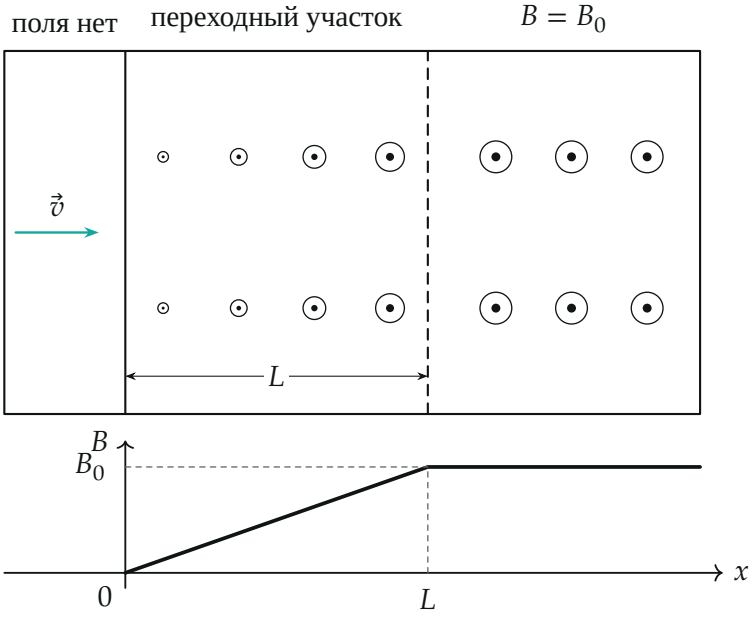
Неоднородное поле

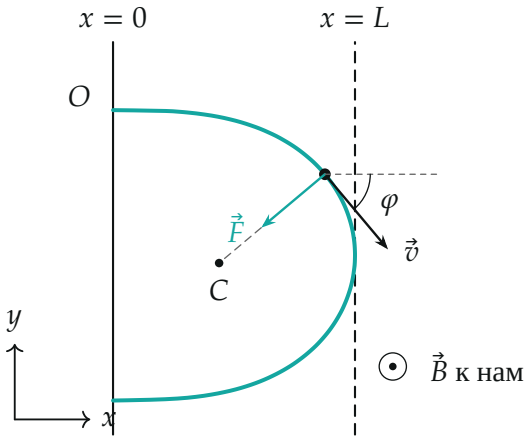
Задача 8. [МОШ 2023/24, заключительный этап, 11 класс, задача 8] Между областью пространства, в которой нет магнитного поля, и областью, в которой есть однородное магнитное поле с направлением вектора индукции B параллельным границе раздела этих областей, имеется «переходный участок» ширины L, в котором поле линейно нарастает. В этот переходный участок перпендикулярно границе раздела влетел протон со скоростью v. Максимальная глубина «проникновения» протона туда, где поле есть, как раз равна толщине «переходного участка». «Разворот» протона длился $\tau_p = 1$ секунду. В точности с такой же скоростью и тоже перпендикулярно границе раздела в эту же область влетел электрон. Сколько времени длился «разворот» электрона? На какую глубину электрон проник в область, где имеется магнитное поле? Масса электрона в 1838 раз меньше массы протона.



Поясняющий рисунок: границы областей, поле $\vec{B}$ (к нам; размер значка растёт вместе с B) и профиль $B(x)$.

▲ **Решение. Что происходит.** Магнитная сила перпендикулярна скорости, поэтому не меняет её модуль, а только поворачивает направление. Частица влетает в нарастающее поле, дуга искривляется всё сильнее, скорость поворачивается на 180° и частица вылетает обратно — «разворот». Класс задачи — движение в неоднородном магнитном поле при постоянной скорости: поворот скорости считаем по углу φ, а глубину x и время t выражаем через него. Главная идея — составить уравнение для $x(\varphi)$ и посмотреть, как масса входит в ответ.

Обозначения. Ось x направлена вглубь, перпендикулярно границе, $x = 0$ — граница области без поля; ось y вдоль границы, поле $\vec{B}$ направлено вдоль z и перпендикулярно плоскости движения. В переходном участке $B(x) = B_0\, x/L$, $0 \le x \le L$. φ — угол между скоростью и осью x (угол поворота скорости); q — модуль заряда (у протона и электрона одинаков), m — масса.



Произвольный момент: сила Лоренца направлена к центру кривизны C, $x(\varphi)$ растёт до $x_{\max}$ и убывает.

1. Модуль скорости. Сила Лоренца перпендикулярна скорости и работы не совершает, поэтому $|\vec{v}| = v = \text{const}$ у обеих частиц (потерь на излучение не учитываем).

2. Уравнение поворота. Второй закон Ньютона для частицы в проекции на нормаль к траектории в точке с глубиной x: $mv^2/\rho = qvB(x)$, где

ρ — радиус кривизны. Скорость поворачивается с угловой скоростью $d\varphi/dt = v/\rho$, откуда

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{qB(x)}{m} = \frac{qB_0}{mL}\,x.$$

Глубина меняется по закону $dx/dt = v\cos\varphi$. Исключим время, разделив второе уравнение на первое:

$$x\,dx = \frac{mvL}{qB_0}\cos\varphi\,d\varphi.$$

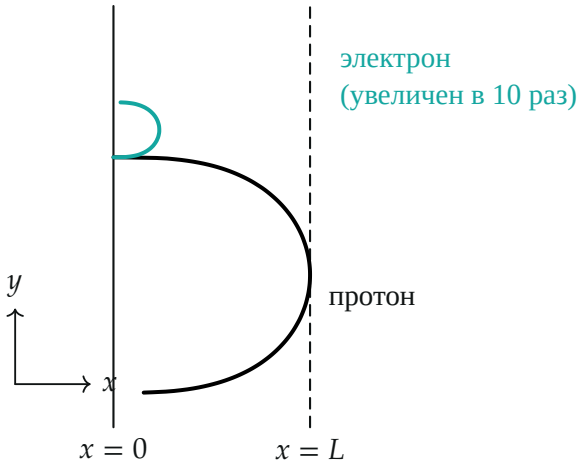
Просуммируем от начала ($x = 0$, $\varphi = 0$) до произвольной точки пути:

$$\frac{x^2}{2} = \frac{mvL}{qB_0}\sin\varphi \quad\Rightarrow\quad x(\varphi) = \sqrt{\frac{2mvL}{qB_0}\sin\varphi}.$$

Наибольшая глубина — при $\varphi = \pi/2$, когда скорость параллельна границе:

$$x_{\max} = \sqrt{\frac{2mvL}{qB_0}} \propto \sqrt{m}.$$

Формула верна, пока частица остаётся в переходном участке, где $B = B_0 x/L$.



Траектории на одном рисунке: протон доходит до $x = L$, электрон отклоняется в другую сторону и проникает в $\sqrt{1838} \approx 43$ раза меньше (его путь показан увеличенным в 10 раз, в натуральную величину глубина $\approx 0{,}1$ от нарисованной).

3. Глубина проникновения электрона. Для протона $x_{\max} = L$, значит, у электрона при тех же q, v, B_0, L

$$L_e = L\sqrt{\frac{m_e}{m_p}} = \frac{L}{\sqrt{1838}} \approx \frac{L}{43} \approx 0{,}023\,L.$$

Электрон остаётся внутри переходного участка, поэтому формула $x(\varphi)$ для него применима.

4. Время разворота. Из $\dfrac{d\varphi}{dt} = \dfrac{qB_0}{mL}x$ и $x(\varphi)$ получаем $dt = \dfrac{mL}{qB_0}\dfrac{d\varphi}{x}$:

$$dt = \sqrt{\frac{mL}{2qB_0v}}\,\frac{d\varphi}{\sqrt{\sin\varphi}}.$$

Разворот — поворот скорости на φ от 0 до π:

$$\tau = \sqrt{\frac{mL}{2qB_0v}}\int_0^{\pi}\frac{d\varphi}{\sqrt{\sin\varphi}} = I\sqrt{\frac{mL}{2qB_0v}}, \qquad I \approx 5{,}24.$$

Интеграл I — число, одно и то же для любой частицы; нам нужно только, что $\tau \propto \sqrt{m}$. Тогда

$$\tau_e = \tau_p\sqrt{\frac{m_e}{m_p}} = \frac{1\text{ с}}{\sqrt{1838}} \approx 0{,}023\text{ с}.$$

Обратите внимание: время поворота пропорционально $\sqrt{m}$, а не m, как период обращения в однородном поле ($T = 2\pi m/qB$). Лёгкая частица проникает не так глубоко, видит меньшее поле, но и поворачивается быстрее — результат дают оба эффекта вместе, и их нужно считать по формуле для $B(x)$. Знак заряда влияет только на сторону отклонения (протон — вниз, электрон — вверх на рисунке), но не на $x_{\max}$ и τ.

Второй способ — размерности. Поле в переходном участке $B = Gx$, $G = B_0/L$, поэтому параметры задачи — только m, qG и v. Из них единственным образом составляются длина и время: $\ell = \sqrt{mv/(qG)}$, $\tau_0 = \ell/v = \sqrt{m/(qGv)}$ (проверьте размерности: qG — это кг/(с · м)). Значит, $x_{\max} = c_1\ell$ и $\tau = c_2\tau_0$ с безразмерными постоянными c_1, c_2 — они одинаковы для протона и электрона. Оба результата $\propto \sqrt{m}$, как и получено.

Проверка. Численно (интегрирование уравнений $\dot\varphi = qB_0x/(mL)$, $\dot x = v\cos\varphi$): при $x_{\max} = L$ время разворота протона $\tau_p \approx 2{,}62\,L/v$, его сдвиг вдоль границы $\approx 1{,}20\,L$; для частицы в 1838 раз легче глубина и время уменьшаются в $\sqrt{1838} \approx 42{,}9$ раза. Размерность: $\tau_0^2 = m/(qGv)$ — это кг, делённый на кг/(с · м) · м/с = кг/с^2, то есть с^2. Смысл: лёгкая частица быстрее и «мельче» разворачивается, пока в более слабом поле.

Ответ. $\tau_e = \tau_p/\sqrt{1838} \approx 0{,}023$ с; глубина проникновения электрона $L_e = L/\sqrt{1838} \approx L/43$.