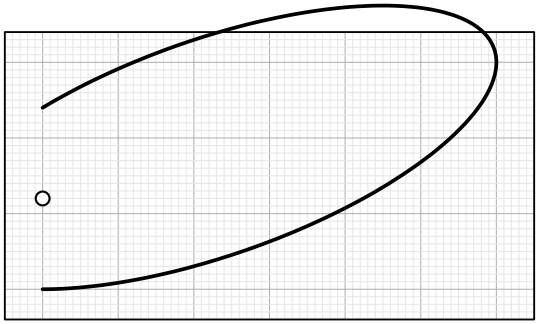
Построение

Задача 9. [МОШ 2023/24, заключительный этап, 11 класс, задача 9] На выданном вам дополнительном листе вы видите кривую, которая является действительным увеличенным изображением половины окружности в тонкой линзе, а также точку (точнее говоря, маленький кружок, лежащий на отрезке, стягивающем концы кривой), являющуюся изображением центра этой окружности. Постройте оптический центр линзы. Найдите фокусное расстояние и радиус окружности. Единицей измерения длины считайте длину стороны маленькой клетки на рисунке.

Построения следует делать на выданном вам дополнительном листе. Учтите, что при оценивании вашего решения будет учитываться только конечный результат, поэтому точность построений и вычислений в этой задаче критически важна.



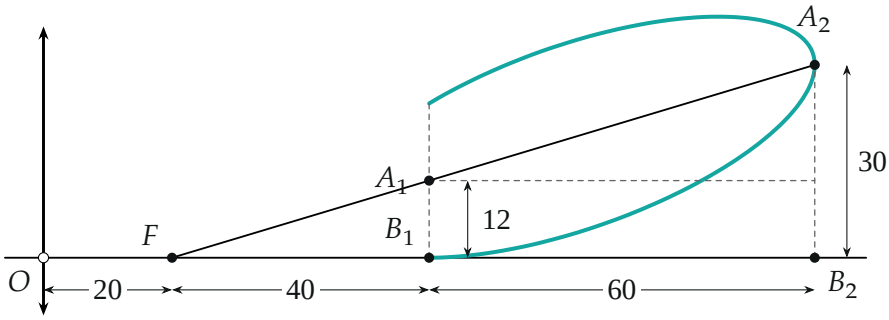
Лист в PDF условий не опубликован: кривая перерисована (с поворотом) по рисунку авторского решения и сверена расчётом. Тонкие линии — клетки, жирные — через 10.

▲ **Решение.** **Что происходит.** Тонкая линза переносит точки предмета в точки изображения по двум правилам: луч, параллельный оси, после линзы идёт через фокус, а точка и её изображение связаны формулой линзы. По картинке нужно найти, где ось, где фокус и где линза, и затем получить числа из двух уравнений. Класс задачи — построение по изображению: всё, что нужно, берётся из геометрии листа и из двух фактов: изображение центра лежит в середине отрезка, а изображение полуокружности имеет хорду, перпендикулярную оси.

Обозначения. O — оптический центр, F — фокус по ту же сторону, где изображение, f — фокусное расстояние, R — радиус окружности. Концы диаметра полуокружности — A и B, центр — C; их изображения — A_1, B_1 и точка на отрезке. Рисунок построения повёрнут: ось горизонтальна, изображение справа от линзы.

1. Диаметр перпендикулярен оси. Пусть точки A и B находятся на расстояниях $u_A = a_A - f$ и $u_B = a_B - f$ от переднего фокуса вдоль оси. Из формулы линзы в виде $u\,u' = f^2$ изображения отстоят от заднего фокуса на $u' = f^2/u$. Изображение середины отрезка AB имеет $u' = \dfrac{2f^2}{u_A + u_B}$, середина изображений — $u' = \dfrac{f^2}{2}\left(\dfrac{1}{u_A} + \dfrac{1}{u_B}\right)$. На листе изображение центра лежит в середине отрезка, значит эти два числа равны, то есть $4u_Au_B = (u_A + u_B)^2$, $u_A = u_B$. Концы диаметра равноудалены от линзы: диаметр перпендикулярен оси, и хорда изображения тоже перпендикулярна оси (одинаковое увеличение).

2. Ось. Касательные к полуокружности в концах диаметра перпендикулярны диаметру, то есть параллельны оси. Прямая, параллельная оси, после линзы идёт через F, поэтому касательная к кривой в конце хорды проходит через F. На листе в точке B_1 кривая выходит перпендикулярно хорде, и эта касательная — перпендикуляр к хорде через F; такой же перпендикуляр — ось. Значит, ось — касательная к кривой в B_1, и B лежит на оси. Хорда A_1B_1 перпендикулярна оси, центр C находится на высоте R над осью.



Построение: прямая A_1A_2 пересекает ось в фокусе F, линза O — в 20 клетках от F (числа — в клетках).

3. Фокус. Самая ближняя к линзе точка полуокружности P (на оси симметрии, вершина) и центр C находятся на одной высоте R над осью — на одной прямой, параллельной оси. Лучи из них, параллельные оси, после линзы идут по одной прямой через F, поэтому их изображения A_2 и A_1 лежат на прямой A_1A_2 через F. Точка A_2 — изображение ближайшей точки; для неё расстояние до линзы d' наибольшее, и на листе это самая удалённая от хорды точка кривой. Фокус — пересечение A_1A_2 с осью (рис. 2).

Снимаем с листа (по рисунку авторского решения): $A_1B_1 = 12$ (высота изображения центра), высота A_2 над осью $A_2B_2 = 30$, расстояние $B_1B_2 = 60$. Прямая A_2A_1 опускается на 18 клеток на каждые 60 по оси; ей надо опуститься ещё на 12, то есть пройти $\dfrac{12}{18}\cdot 60 = 40$. Итак, $FB_1 = 40$ и $FB_2 = 100$.

4. Числа. Пусть a_1 — расстояние от линзы до диаметра, $a_2 = a_1 - R$ — до ближайшей точки. Изображение B находится на расстоянии $f+40$ от линзы, изображение P — на расстоянии $f+100$. Формула линзы для B и P:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{f+40} + \frac{1}{a_1} \;\Rightarrow\; a_1 = \frac{f(f+40)}{40},$$

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{f+100} + \frac{1}{a_2} \;\Rightarrow\; a_2 = \frac{f(f+100)}{100}.$$

Радиус даёт соотношение $a_1 - a_2 = R$. Увеличение для радиуса CB даёт $R = 12\dfrac{a_1}{f+40} = 0{,}3f$ (то же получается из высоты A_2: $R = 30\dfrac{a_2}{f+100} = 0{,}3f$ — это согласованность, новой информации нет). Подставим в $a_1 - a_2 = R$:

$$\frac{f(f+40)}{40} - \frac{f(f+100)}{100} = 0{,}3f \;\Rightarrow\; \frac{f}{40} - \frac{f}{100} = 0{,}3$$

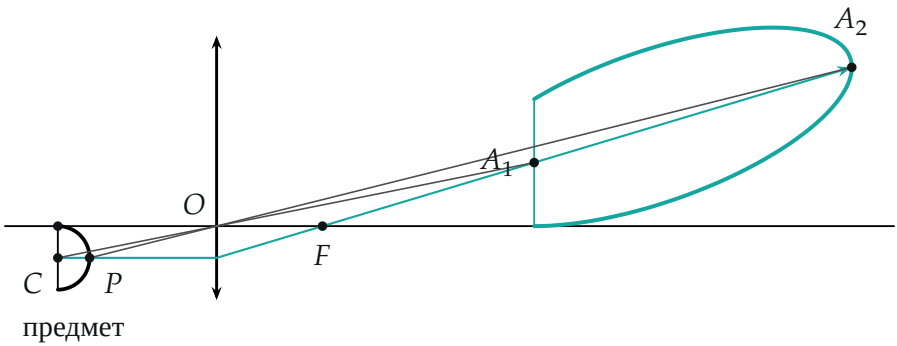
$$f = 20, \qquad R = 0{,}3f = 6.$$

Расстояния: $a_1 = 30$, $a_2 = 24$.

5. Оптический центр. Линза лежит на оси между предметом и изоб-

ражением, на расстоянии $f = 20$ от фокуса F в сторону от изображения: от B_1 это $40 + 20 = 60$ клеток.

Обратите внимание: изображение полуокружности — не полуокружность и не половина эллипса с тем же центром: увеличение зависит от расстояния до линзы ($\Gamma = 2$ у диаметра и $\Gamma = 5$ у ближайшей точки), поэтому прямая A_1A_2 проходит через фокус, а не через «центр» кривой.



Проверка ходом лучей: параллельный оси луч из C и P после линзы идёт через F, A_1 и A_2; лучи через O приходят в A_1 и A_2.

Проверка. Прямым ходом: $a_1 = 30$, $f = 20$ дают $d' = \dfrac{30 \cdot 20}{10} = 60$, $\Gamma = 2$, образ радиуса $2 \cdot 6 = 12$ — как A_1B_1. Для P: $a_2 = 24$, $d' = \dfrac{24 \cdot 20}{4} = 120$, $\Gamma = 5$, высота $5 \cdot 6 = 30$ — как A_2B_2; расстояние $B_1B_2 = 120 - 60 = 60$. Всё по листу сходится, значит, построение верно: $f = 20$, $R = 6$ клеток.

Ответ. Оптический центр O лежит на оси на расстоянии 20 клеток от фокуса F (и 60 от B_1) в сторону от изображения; $f = 20$, $R = 6$ (в клетках).