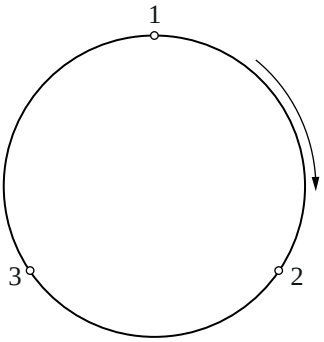
На «стадионе»

Задача 1. [МОШ 2023/24, заключительный этап, 7 класс, задача 1] Три маленьких тела изначально покоятся в трёх равноудаленных точках, принадлежащих окружности длиной 3 метра (см. рисунок).



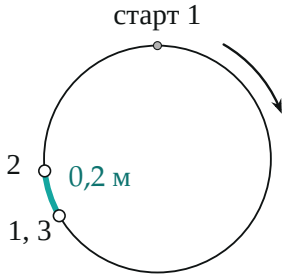
В некоторый момент они одновременно начинают движение в одном направлении по окружности с постоянными скоростями: $v_1 = 4{,}0$ м/с, $v_2 = 3{,}6$ м/с, $v_3 = 3{,}0$ м/с (индекс в обозначении скорости соответствует номеру тела на рисунке). При этом тела не сталкиваются, проходя мимо друг друга. Колонной называется наименьшая дуга окружности, содержащая три тела. Например, в начальном положении длина колонны равна 2 метра. Найдите минимальную длину колонны в процессе движения тел.

▲ **Решение.** **Что происходит.** Тела бегут по кругу по часовой стрелке: впереди медленное тело 3, за ним тело 2, а самое быстрое тело 1 догоняет их сзади. Колонна — это круг без самого большого промежутка между соседними телами. Главная идея: колонна короче всего, когда встречаются самое быстрое и самое медленное тело; тогда длина колонны — просто расстояние от места встречи до тела 2. Остаётся перебрать встречи тел 1 и 3 и найти, где в эти моменты тело 2.

Обозначения. $C = 3$ м — длина окружности, s — путь по окружности по ходу движения от начального положения тела 1; в начале $s_1 = 0$,

$s_2 = 1$ м, $s_3 = 2$ м. t_k — момент k-й встречи тел 1 и 3, d_k — на сколько тело 2 в этот момент впереди них (по ходу, от 0 до C).

1. Когда колонна убывает и растёт. Рассмотрим момент, когда тело 1 вот-вот догонит тело 3. Колонна — дуга от «последнего» тела до «первого». Если тело 2 впереди тела 3, колонна идёт от тела 1 до тела 2; если тело 2 позади тела 1 — от тела 2 до тела 3. В обоих случаях один её край — тело 1 или 3 — и колонна укорачивается, пока тело 1 приближается к телу 3 сзади: тело 1 (сзади) быстрее всех, тело 3 (спереди) медленнее всех. После обгона тело 1 впереди тела 3, и колонна по той же причине растёт. Значит, минимумы длины — в моменты встреч 1 и 3.



Первая встреча тел 1 и 3 ($t = 2$ с) — в точке старта тела 3; тело 2 впереди на 0,2 м, это и есть колонна.

2. Встречи тел 1 и 3. Тело 1 догоняет тело 3 с относительной скоростью $v_1 - v_3 = 1$ м/с. В начале оно позади на 2 м, затем каждый раз должно отыграть целый круг:

$$t_1 = \frac{2\text{ м}}{v_1 - v_3} = 2\text{ с}, \qquad t_{k+1} - t_k = \frac{C}{v_1 - v_3} = 3\text{ с}.$$

За 3 с тело 3 проходит 9 м — ровно три круга, поэтому все встречи — в одной точке, точке старта тела 3 ($s = 2$ м).

3. Где тело 2. Относительно тела 3 тело 2 движется со скоростью $v_2 - v_3 = 0{,}6$ м/с. В начале оно позади тела 3 на 1 м (или впереди на 2 м). К моменту $t_1 = 2$ с оно отыграло 1,2 м и оказалось впереди на $d_1 = 2 + 1{,}2 - 3 = 0{,}2$ м. За каждые следующие 3 с тело 2 уходит вперёд ещё

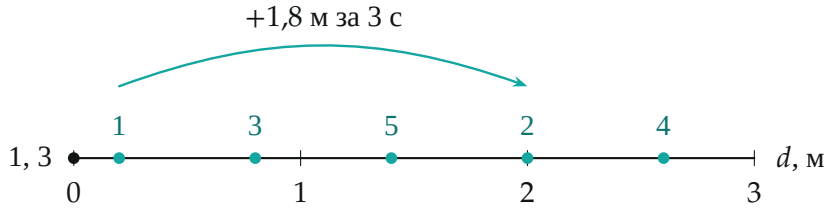
на $0{,}6 \cdot 3 = 1{,}8$ м:

$$d_{k+1} = d_k + 1{,}8 \text{ м} \quad (\text{по модулю } 3 \text{ м}).$$

Колонна в момент встречи — меньшая из дуг d_k и $C - d_k$:

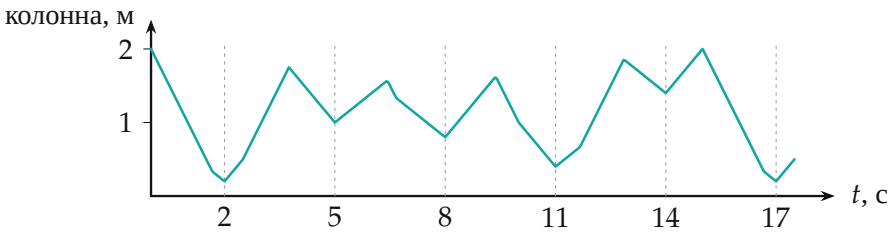
k	1	2	3	4	5	6
d_k, м	0,2	2,0	0,8	2,6	1,4	0,2
колонна, м	0,2	1,0	0,8	0,4	1,4	0,2

На шестой встрече тело 2 снова в 0,2 м впереди: $5 \cdot 1{,}8 = 9$ м — целое число кругов, и дальше всё повторяется с периодом 15 с.



Положение тела 2 впереди места встречи в моменты встреч 1–5 (окружность развёрнута в отрезок 0 … 3 м, точки 0 и 3 — одна и та же точка).

4. Проверка графиком. Длину колонны в каждый момент можно посчитать прямо по положениям трёх тел (python, шаг 0,05 с). Минимумы графика — ровно в моменты встреч тел 1 и 3, наименьший равен 0,2 м.



Длина колонны со временем; пунктир — встречи тел 1 и 3. Минимум 0,2 м — при $t = 2$ с и $t = 17$ с.

Обратите внимание: тело 2 само по себе в минимуме не участвует — оно лишь задаёт, какая из двух дуг короче. Поэтому достаточно проверить конечное число моментов, а не всё движение.

Проверка. Через 15 с (период) все тела проходят целое число кругов относительно тела 3: $(v_1 - v_3)\cdot 15 = 15$ м и $(v_2 - v_3)\cdot 15 = 9$ м — по 5 и 3 круга, конфигурация повторяется, и других встреч искать не нужно. Численный перебор даёт тот же минимум 0,2 м.

Ответ. 20 см (впервые — через 2 с после старта, в точке старта тела 3).