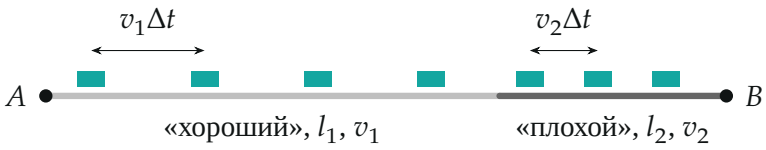
Хороший, плохой

Задача 2. [МОШ 2023/24, заключительный этап, 7 класс, задача 2] Города A и B соединены дорогой, которая состоит из двух участков: «хорошего» (с недавно сделанным ремонтом, где машины едут быстро) и «плохого» (со старым разбитым асфальтом, по которому машины едут медленно). В некоторый момент времени из города A в город B выезжает машина, затем машины продолжают выезжать каждые 30 секунд. По «хорошему» участку дороги все машины едут с одинаковой большой скоростью, а по «плохому» — с одинаковой маленькой скоростью. Если подсчитать среднее арифметическое скоростей всех автомобилей на дороге в некоторый момент, когда первая машина уже прибыла в город B, а последняя ещё не выехала из города A, то получится величина $u = 70$ км/ч. Если же подсчитать среднее арифметическое скоростей только тех автомобилей на дороге, которые уже проехали половину расстояния между городами, то получится величина $u_2 = 60$ км/ч. Найдите скорость автомобилей на «хорошем» участке дороги, если известно, что его длина превышает длину «плохого» участка.

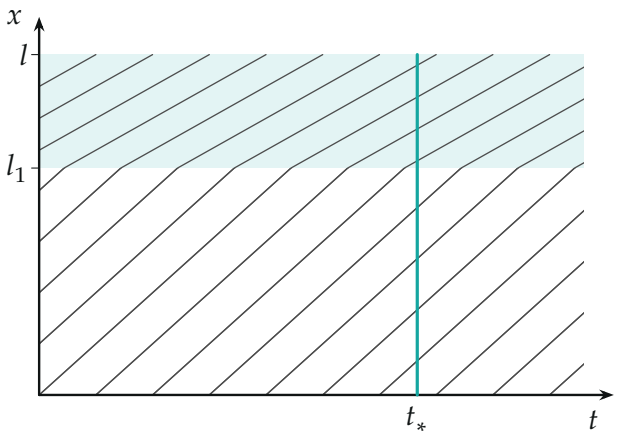


Поясняющий рисунок (порядок участков найден в решении): на плохом участке машины идут плотнее.

▲ **Решение. Что происходит.** Машины выезжают через равные промежутки $\Delta t = 30$ с и все едут одинаково, поэтому на дороге установился стационарный поток: на каждом участке машины идут с постоянной дистанцией $v\Delta t$. Там, где медленно, машин больше. Главная идея: среднее арифметическое скоростей машин на отрезке дороги равно средней путевой скорости одной машины на этом отрезке. Тогда u — средняя скорость на всём пути, u_2 — на второй половине, и задача становится задачей о средней скорости.

Обозначения. l_1, v_1 — длина и скорость «хорошего» участка, l_2, v_2 — «плохого»; $l = l_1 + l_2$; N_1, N_2 — число машин на участках в выбранный момент.

1. Сколько машин на участке. Соседние машины проезжают одно и то же место через Δt, поэтому расстояние между ними на участке со скоростью v равно $v\Delta t$. На участке длины l_1 помещается $N_1 = \dfrac{l_1}{v_1\Delta t}$ машин, на участке l_2 — $N_2 = \dfrac{l_2}{v_2\Delta t}$ (машин много, округлением пренебрегаем).



Графики движения машин (пример $l_1 = 2l_2$, $v_1 = 84$ км/ч, $v_2 = 52{,}5$ км/ч). Вертикаль t_* пересекает их в положениях машин в этот момент: на плохом участке (закрашен) машины идут гуще — на единицу длины их в $v_1/v_2 = 1{,}6$ раза больше.

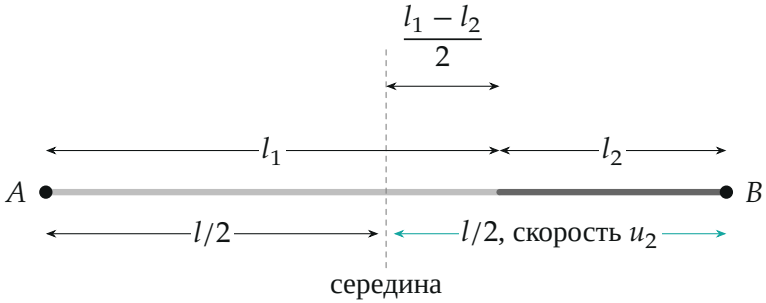
2. Среднее арифметическое скоростей. Всего на дороге $N_1 + N_2$ машин, N_1 из них едут со скоростью v_1, N_2 — со скоростью v_2:

$$u = \frac{N_1v_1 + N_2v_2}{N_1 + N_2} = \frac{\dfrac{l_1}{\Delta t} + \dfrac{l_2}{\Delta t}}{\dfrac{l_1}{v_1\Delta t} + \dfrac{l_2}{v_2\Delta t}} = \frac{l_1 + l_2}{\dfrac{l_1}{v_1} + \dfrac{l_2}{v_2}}.$$

Справа — путь, делённый на время его прохождения одной машиной: средняя путевая скорость на всей дороге. Тот же вывод годится для лю-

бого отрезка дороги, в частности для её второй половины: u_2 — средняя скорость одной машины на второй половине пути.

3. Где плохой участок. Плохой участок короче половины дороги ($l_2 < l_1$). Если бы он был в начале, вторая половина целиком была бы хорошей и $u_2 = v_1 > u$. А по условию $u_2 = 60 < u = 70$ км/ч, значит, плохой участок в конце. Вторая половина длины $l/2$ состоит из куска хорошего участка длины $\dfrac{l}{2} - l_2 = \dfrac{l_1 - l_2}{2}$ и всего плохого участка l_2.



Вторая половина пути: кусок хорошего участка и весь плохой.

4. Уравнения средней скорости. Время на всём пути и на второй половине:

$$\frac{l}{u} = \frac{l_1}{v_1} + \frac{l_2}{v_2}, \qquad \frac{l}{2u_2} = \frac{l_1 - l_2}{2v_1} + \frac{l_2}{v_2}.$$

Неизвестных много (l_1, l_2, v_1, v_2), но l_2/v_2 — время на плохом участке — входит в оба уравнения одинаково. Вычтем из первого второе:

$$\frac{l}{u} - \frac{l}{2u_2} = \frac{l_1}{v_1} - \frac{l_1 - l_2}{2v_1} = \frac{l_1 + l_2}{2v_1} = \frac{l}{2v_1}.$$

Длина l сокращается:

$$\frac{1}{2v_1} = \frac{1}{u} - \frac{1}{2u_2} \quad \Rightarrow \quad v_1 = \frac{u\,u_2}{2u_2 - u} = \frac{70 \cdot 60}{120 - 70}\ \text{км/ч} = 84\ \text{км/ч}.$$

Физический смысл: первая половина пути целиком хорошая, и время на ней $\dfrac{l}{2v_1}$ — это разность времени на всём пути и на второй половине.

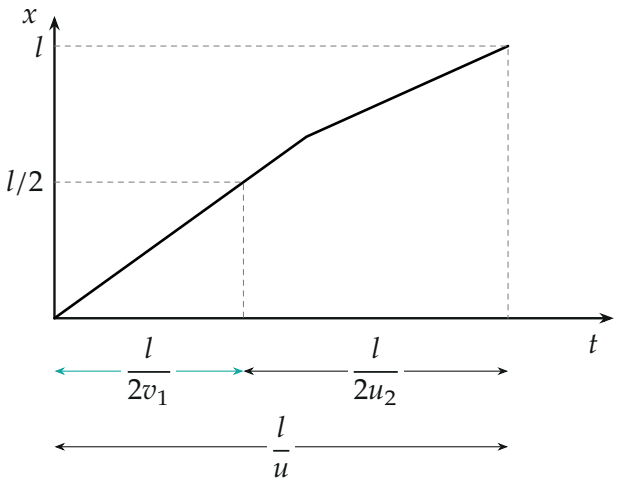


График движения одной машины: время всего пути складывается из времени первой половины (только хорошая дорога) и второй.

Обратите внимание: среднее арифметическое скоростей машин на дороге — не среднее $\frac{v_1+v_2}{2}$. Медленных машин на дороге больше, и среднее «тянется» к v_2 ровно так, как у средней путевой скорости.

Проверка. Размерность: км/ч. Пример $l_1 = 2l_2$: из $\frac{3}{70} = \frac{2}{84} + \frac{1}{v_2}$ получаем $v_2 = 52{,}5$ км/ч, и на второй половине $\frac{1{,}5}{0{,}5/84 + 1/52{,}5} = 60$ км/ч — как в условии. Ответ не зависит от отношения l_1/l_2, а v_2 из условия не определяется. Знак: $2u_2 > u$, поэтому $v_1 > 0$, и $v_1 = 84 > u = 70$ км/ч.

Ответ. $v_1 = \frac{u\,u_2}{2u_2 - u} = 84$ км/ч.