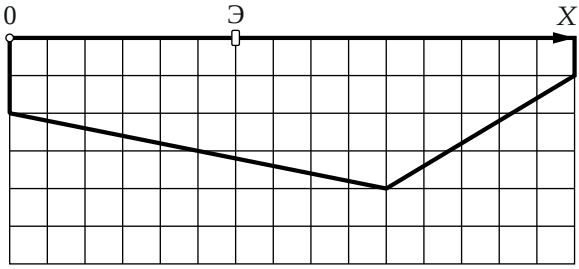
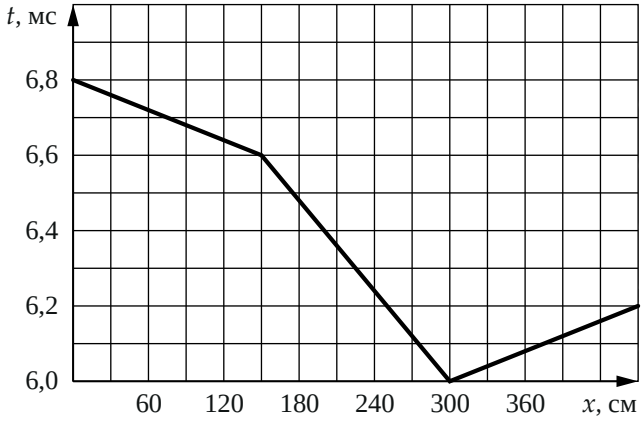
Эхолот на льдине

Задача 3. [МОШ 2023/24, заключительный этап, 7 класс, задача 3] На рисунке, представленном ниже, показан профиль участка покоящейся льдины (вид сбоку). Длина стороны клетки соответствует 30 см. На плоской горизонтальной поверхности льдины с помощью специального эхолота проводят измерения, располагая эхолот в точках с разными координатами по оси OX (см. рисунок).



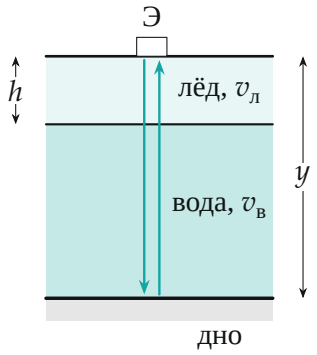
Эхолот испускает звуковые сигналы вертикально вниз, а через некоторое время регистрирует отражённый от дна сигнал. Можно считать, что после отражения от дна сигнал распространяется вертикально вверх. На графике, представленном на втором рисунке, показана зависимость $t(x)$, где t — время, прошедшее с момента испускания звукового импульса эхолотом до момента приёма отражённого от дна сигнала, а x — координата эхолота.



Постройте график зависимости расстояния от верхней поверхности льдины до дна от координаты x. Считайте, что средние скорости распространения звука в льдине и в воде равны 3000 м/с и 1500 м/с соответственно.

▲ **Решение. Что происходит.** Звук идёт вниз сквозь лёд, потом сквозь воду до дна и тем же путём обратно. Время зависит от двух толщин: льда (её даёт профиль) и воды (её ищем). В каждой точке x одно уравнение даёт одну глубину дна. Главная идея: профиль льда и график $t(x)$ — ломаные, поэтому и дно — ломаная; достаточно найти дно в точках изломов и соединить их отрезками.

Обозначения. Ось OY — вертикально вниз от верхней поверхности льдины; $h(x)$ — толщина льда, $y(x)$ — расстояние от верхней поверхности до дна; $v_{\text{л}} = 3000$ м/с, $v_{\text{в}} = 1500$ м/с.



Путь сигнала: вниз сквозь лёд толщины h и воду толщины $y - h$, затем обратно тем же путём.

1. Время сигнала. Сигнал проходит лёд и воду дважды, в каждом слое с постоянной скоростью:

$$t = 2\left(\frac{h}{v_л} + \frac{y-h}{v_в}\right).$$

Выразим глубину дна; с $v_л = 2v_в$:

$$y = \frac{v_в t}{2} + h\left(1 - \frac{v_в}{v_л}\right) = \frac{v_в t}{2} + \frac{h}{2} = 750\ \tfrac{м}{с} \cdot t + \frac{h}{2}.$$

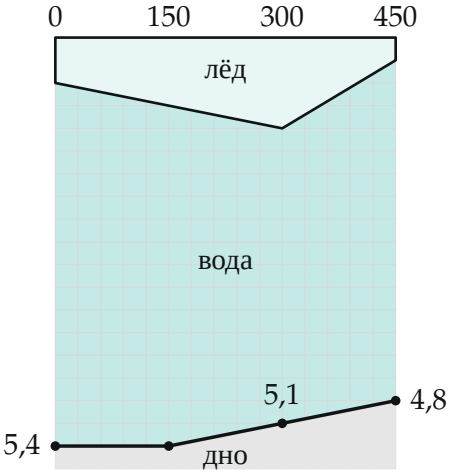
Здесь y — сумма двух слагаемых, линейных по t и по h. На участке, где и $t(x)$, и $h(x)$ — отрезки прямых, $y(x)$ — тоже отрезок прямой. Изломы дна могут быть только там, где излом у графика или у профиля льда.

2. Данные с рисунков. Изломы: у графика $t(x)$ — при $x = 150$ и 300 см, у профиля льда — при $x = 300$ см; концы участка — $x = 0$ и 450 см. Толщину льда считаем по клеткам (клетка 30 см): $h(0) = 2$ клетки $= 0{,}6$ м, $h(300) = 4$ клетки $= 1{,}2$ м, $h(450) = 1$ клетка $= 0{,}3$ м; при $x = 150$ см нижняя граница льда — посередине между 0,6 и 1,2 м, $h(150) = 0{,}9$ м. Время с графика: 6,8; 6,6; 6,0; 6,2 мс.

3. Глубина дна в четырёх точках. По формуле пункта 1:

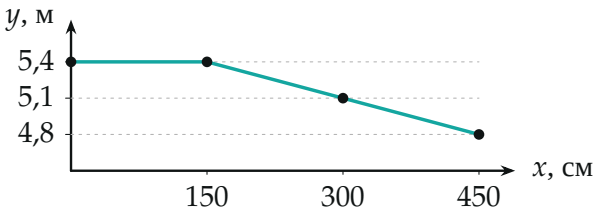
x, см	0	150	300	450
t, мс	6,8	6,6	6,0	6,2
h, м	0,6	0,9	1,2	0,3
$750t$, м	5,1	4,95	4,5	4,65
y, м	5,4	5,4	5,1	4,8

Например, при $x = 0$: $y = 750 \cdot 0{,}0068 + 0{,}3 = 5{,}4$ м.



Ответ в масштабе условия (клетка 30 см): лёд, вода и дно. Глубины дна — в метрах, координаты x — в сантиметрах.

4. График. Соединяем найденные точки отрезками: дно горизонтально на участке 0 … 150 см (глубина 5,4 м), затем поднимается на 0,3 м на каждые 150 см до 4,8 м при $x = 450$ см.



Искомая зависимость $y(x)$ — расстояние от верхней поверхности льдины до дна.

Обратите внимание: изломы $t(x)$ и изломы дна — не одно и то же. При $x = 150$ см лёд не ломается, и излом $t(x)$ целиком от дна. При $x = 300$ см ломаются и лёд, и дно, а наклон $t(x)$ меняется от обоих. Поэтому дно нельзя «срисовать» с графика $t(x)$ — нужно пересчитать по формуле.

Проверка. Обратный счёт при $x = 450$ см: $2\left(\dfrac{0{,}3}{3000} + \dfrac{4{,}5}{1500}\right)$ с $= 6{,}2$ мс — как на графике. Предел: без льда ($h = 0$) формула даёт $y = v_{\text{в}}t/2$ — обычный эхолот в воде.

Ответ. $y = \dfrac{v_{\text{в}}t}{2} + \dfrac{h}{2}$; дно — ломаная через точки $y(0) = 5{,}4$ м, $y(150\text{ см}) = 5{,}4$ м, $y(300\text{ см}) = 5{,}1$ м, $y(450\text{ см}) = 4{,}8$ м (график $y(x)$ — на рисунке).