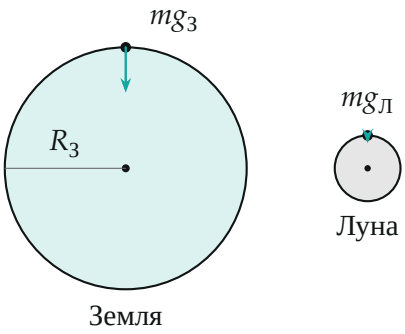
Плотность Луны

Задача 4. [МОШ 2023/24, заключительный этап, 7 класс, задача 4] Согласно закону всемирного тяготения материальная точка и однородный шар притягиваются друг к другу с силой $F = G\dfrac{m_1 \cdot m_2}{r^2}$, где G — фундаментальная константа под названием гравитационная постоянная, m_1, m_2 — массы материальной точки и шара соответственно, r — расстояние между материальной точкой и центром шара. Чему равна средняя плотность Луны, если средняя плотность Земли равна 5,5 г/см^3? Радиус Земли равен 6400 км, радиус Луны 1740 км. Ускорение свободного падения на Земле равно 9,8 Н/кг, а на Луне равно 1,6 Н/кг.



Поясняющий рисунок: Земля и Луна в одном масштабе, тело m на поверхности каждой (стрелки сил — в масштабе g).

▲ **Решение. Что происходит.** Сила тяжести тела на поверхности планеты — это сила притяжения к шару-планете. Отсюда g выражается через массу и радиус планеты, а масса — через плотность и объём. Главная идея: для шара g пропорционально ρR, поэтому отношение плотностей находится из отношений g и R, а гравитационная постоянная сокращается.

Обозначения. M, R, ρ — масса, радиус и средняя плотность планеты; индексы «З» — Земля, «Л» — Луна; m — масса тела на поверхности.

1. Ускорение свободного падения на поверхности шара. Тело на поверхности находится на расстоянии R от центра. Сила тяжести, с одной

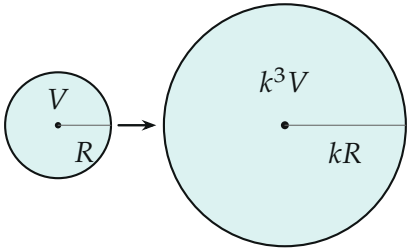
стороны, mg, с другой — сила всемирного тяготения:

$$mg = G\frac{mM}{R^2} \quad \Rightarrow \quad g = G\frac{M}{R^2}.$$

Масса тела сократилась: g — свойство планеты.

2. Масса через плотность. Средняя плотность — масса, делённая на объём шара:

$$M = \rho V = \rho \cdot \frac{4}{3}\pi R^3 \quad \Rightarrow \quad g = \frac{4}{3}\pi G \rho R.$$

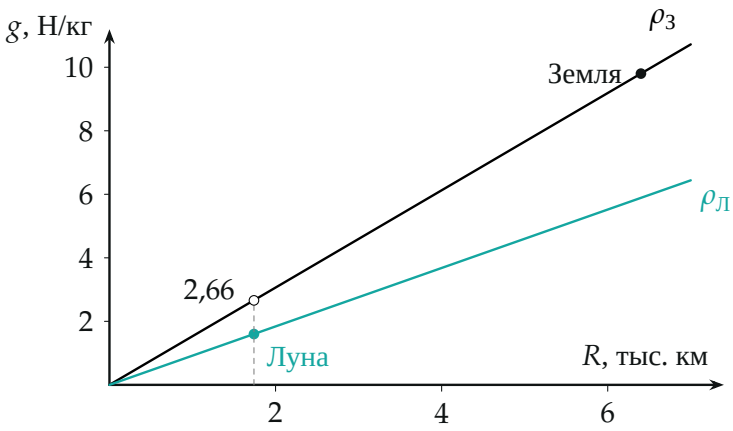


Подобие шаров: радиус больше в k раз — объём (и масса при той же плотности) больше в k^3 раз, квадрат расстояния до центра — в k^2 раз, g — в k раз.

3. Отношение для Земли и Луны. Запишем формулу пункта 2 для обеих планет и разделим одну на другую, чтобы ушли G и $\frac{4}{3}\pi$:

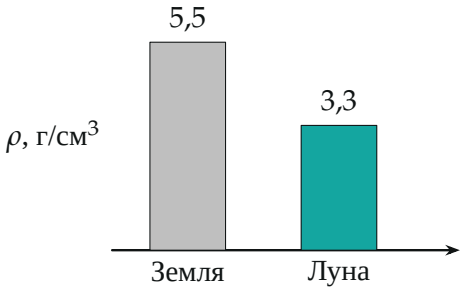
$$\frac{g_З}{g_Л} = \frac{\rho_З R_З}{\rho_Л R_Л} \quad \Rightarrow \quad \rho_Л = \rho_З \frac{R_З}{R_Л} \cdot \frac{g_Л}{g_З}.$$

$$\rho_Л = 5{,}5 \ \frac{\text{г}}{\text{см}^3} \cdot \frac{6400}{1740} \cdot \frac{1{,}6}{9{,}8} \approx 3{,}3 \ \text{г/см}^3.$$



При фиксированной плотности $g \propto R$ — прямая через начало координат, её наклон $\propto \rho$. Шар радиуса Луны с плотностью Земли имел бы $g = 2{,}66$ Н/кг (кружок); у Луны 1,6 — плотность меньше во столько же раз.

4. Второй способ — через тот же график. Если бы Луна имела плотность Земли, на её поверхности было бы $g = 9{,}8 \cdot \dfrac{1740}{6400} \approx 2{,}66$ Н/кг. На самом деле 1,6 Н/кг, в 1,66 раза меньше, значит, и плотность меньше в 1,66 раза: $5{,}5/1{,}66 \approx 3{,}3$ г/см^3.



Средние плотности: Луна заметно «легче» Земли (у Земли тяжёлое железное ядро).

Обратите внимание: g пропорционально не массе, а ρR. Луна меньше Земли в 3,7 раза по радиусу, но g меньше лишь в 6,1 раза, а не в $3{,}7^3 \approx 50$: масса делится ещё на R^2.

Проверка. Размерность: $\text{г/см}^3 \cdot \dfrac{\text{км}}{\text{км}} \cdot \dfrac{\text{Н/кг}}{\text{Н/кг}} = \text{г/см}^3$. Предел: при равных g и R получилась бы равная плотность. Порядок величины: средняя плотность Луны близка к плотности земных горных пород (около 3 г/см^3) — правдоподобно.

Ответ. $\rho_\text{Л} = \rho_\text{З} \dfrac{R_\text{З}\, g_\text{Л}}{R_\text{Л}\, g_\text{З}} \approx 3{,}3$ г/см^3.