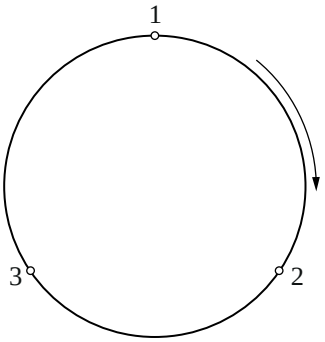
На «стадионе»

Задача 1. [МОШ 2023/24, заключительный этап, 8 класс, задача 1] Три маленьких тела изначально покоятся в трёх равноудаленных точках, принадлежащих окружности длиной 3 метра (см. рисунок).



В некоторый момент они одновременно начинают движение в одном направлении по окружности с постоянными скоростями, равными $v_1 = 4{,}0$ м/с, $v_2 = 3{,}6$ м/с, $v_3 = 3{,}0$ м/с (индекс в обозначении скорости соответствует номеру тела на рисунке). При этом тела не сталкиваются, проходя мимо друг друга. Колонной называется наименьшая дуга окружности, содержащая все три тела. Например, в начальном положении длина колонны равна 2 метра. Найдите минимальную длину колонны в процессе движения тел.

▲ **Решение. Что происходит.** Все три тела бегут по кругу в одну сторону, быстрые догоняют медленных. Колонна — дуга от «заднего» тела до «переднего»; пока порядок тел не меняется, её длина меняется равномерно. Короче всего колонна бывает в момент, когда два тела встречаются: тогда всю колонну задают одна точка встречи и третье тело. Главная идея — перейти к относительным скоростям (кто кого и когда догоняет) и перебрать все встречи за период движения. Класс задачи — кинематика равномерного движения, относительная скорость.

Обозначения. Длина окружности $C = 3$ м. Дуговую координату s отсчитываем по направлению движения от начального положения тела

1 (по рисунку — по часовой стрелке): вначале $s_1 = 0$, $s_2 = 1$ м, $s_3 = 2$ м. $L(t)$ — длина колонны.

1. Где минимум. Три тела делят окружность на три дуги-промежутка, колонна — окружность без самого большого промежутка:

$$L = C - \max(g_1, g_2, g_3).$$

Пока тела не встречаются, каждый промежуток меняется равномерно (разность постоянных скоростей), а максимум из равномерно меняющихся величин может только «переламываться вверх». Значит, между встречами $L(t)$ может расти, убывать или иметь вершину-максимум, но минимумы у неё только в моменты встреч (рис. 3). Остаётся перебрать встречи.

2. Встречи и их период. Тело 1 догоняет тело 3 с относительной скоростью $v_1 - v_3 = 1$ м/с; вначале 1 отстаёт от 3 на 2 м, следующий раз — на целый круг:

$$t_{13} = \frac{2\text{ м}}{1\text{ м/с}} = 2\text{ с},\ 5\text{ с},\ 8\text{ с},\ 11\text{ с},\ 14\text{ с}, \ldots \quad (\text{через } 3\text{ с}).$$

Тело 1 догоняет 2 (отставание 1 м, скорость сближения 0,4 м/с): $t_{12} = 2{,}5$ с, затем через $\dfrac{3}{0{,}4} = 7{,}5$ с. Тело 2 догоняет 3 (отставание 1 м, 0,6 м/с): $t_{23} = 1{,}67$ с, затем через 5 с. Взаимное расположение тел повторяется через общее кратное 3, 7,5 и 5 с — через 15 с; хватит перебрать встречи от 0 до 15 с.

3. Первая встреча 1 и 3. При $t = 2$ с тело 3 прошло 6 м — ровно два круга, оно в точке своего старта; там же тело 1. Тело 2 прошло $3{,}6 \cdot 2 = 7{,}2$ м, его координата $1 + 7{,}2 = 8{,}2$ м, то есть на $8{,}2 - 6 - 2 = 0{,}2$ м впереди точки встречи (рис. 2). Колонна — 20 см.

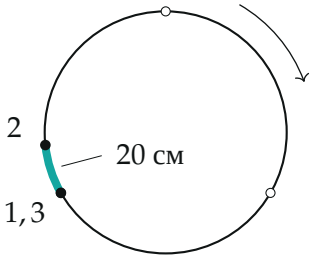


Рис. 2. Момент $t = 2$ с: тела 1 и 3 встретились в точке старта тела 3, тело 2 на 20 см впереди. Колонна (бирюзовая дуга) — 20 см. Белые кружки — начальные положения.

4. Остальные встречи. Тела 1 и 3 всегда встречаются в одной и той же точке (старт тела 3): за 3 с тело 3 проходит ровно круг. А тело 2 за 3 с проходит 10,8 м $= 3$ круга и ещё 1,8 м, так что при каждой следующей встрече оно сдвигается на 1,8 м вперёд по кругу. Его расстояние впереди точки встречи:

$$0{,}2;\quad 2{,}0;\quad 0{,}8;\quad 2{,}6;\quad 1{,}4;\quad 0{,}2 \text{ м } \ldots$$

(при переходе через 3 м вычитаем круг). Колонна — меньшая из дуг между точкой встречи и телом 2: 0,2; 1,0; 0,8; 0,4; 1,4 м, затем всё повторяется (рис. 4).

Встречи с участием тела 2 дают колонны больше: при $t = 1{,}67$ с (2 догнало 3) тело 1 отстаёт на $\frac{1}{3}$ м, колонна 33 см; при $t = 2{,}5$ с (1 догнало 2) — 50 см; далее 1,33, 1,0, 0,67 м. Все значения L в моментах встреч за период:

$$0{,}33;\ \mathbf{0{,}20};\ 0{,}50;\ 1{,}00;\ 1{,}33;\ 0{,}80;\ 1{,}00;\ 0{,}40;\ 0{,}67;\ 1{,}40 \text{ м}.$$

Наименьшее — 0,20 м.

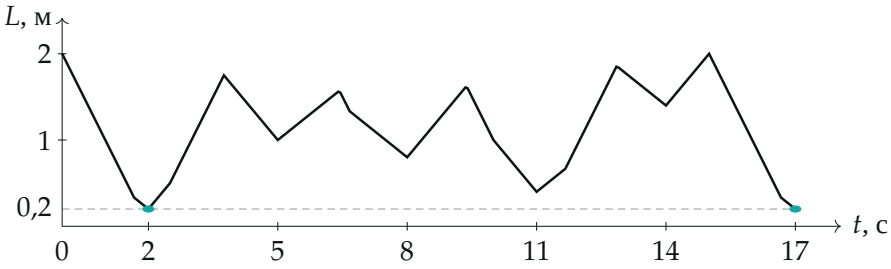


Рис. 3. Длина колонны $L(t)$, посчитанная по положениям тел. Изломы вниз — встречи; самый глубокий минимум 0,2 м при $t = 2$ с, далее картина повторяется с периодом 15 с ($t = 17$ с).

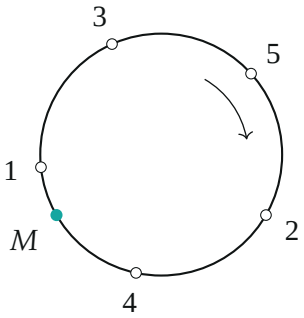


Рис. 4. M — точка, где всегда встречаются тела 1 и 3; цифры — положение тела 2 при 1-й, 2-й, …, 5-й встрече (каждый раз на 1,8 м дальше). Ближе всего к M оно при 1-й встрече (и снова при 6-й).

Обратите внимание. Минимумы длины колонны бывают при любых встречах, не только тел 1 и 3 (например, 33 см при $t = 1{,}67$ с), — поэтому надо перебрать все встречи за период. Тела проходят друг сквозь друга, поэтому «встреча» не меняет их скоростей.

Ответ матрёшкой. $L_{\min} = \min$ по встречам за 15 с $= L(2\text{ с}) = s_2(2\text{ с}) - s_3(2\text{ с}) - 2C = 8{,}2 - 6 - 2 = 0{,}2$ м.

Проверка. Численный расчёт $L(t)$ с шагом 10^{-4} с на отрезке $0 \ldots 60$ с даёт минимум 0,200 м при $t = 2{,}000$ с (и через каждые 15 с). Размерность и смысл: колонна не может быть короче нуля, а нулём она стала бы только при одновременной встрече всех трёх, которой нет: тело 2

при встречах 1 и 3 бывает лишь в точках $0{,}2 + 1{,}8k$ (по модулю 3), среди них нет 0.

Ответ. 20 см.