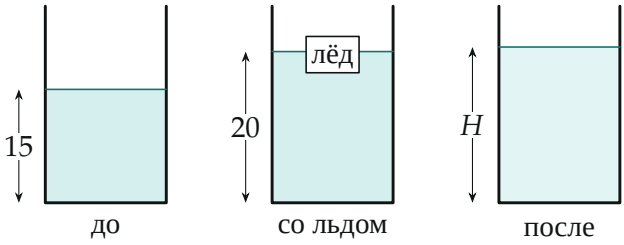
Солевой раствор

Задача 3. [МОШ 2023/24, заключительный этап, 8 класс, задача 3] При смешивании карбоната натрия (соды) массой m_1 и пресной воды массой m_2 получается солевой раствор. Если процентное содержание соды в растворе, равное $\alpha = \dfrac{m_1}{m_1 + m_2}$, принимает значения от 1% до 14%, то плотность раствора карбоната натрия можно рассчитать, воспользовавшись приближенной формулой

$$\rho = \rho_0 \, (1 + \alpha) \, ,$$

где ρ_0 плотность пресной воды, равная 1,0 г/см^3. В цилиндрическом сосуде находится водный раствор карбоната натрия плотностью 1,12 г/см^3, уровень которого расположен на высоте 15,0 см от дна сосуда. В раствор добавляют некоторое количество льда, при этом уровень жидкости в сосуде поднялся на 5,0 см. Когда лёд растаял, жидкость перемешали, и процентное содержание карбоната натрия в растворе уменьшилось. Найдите плотность получившегося раствора. На какой высоте расположен уровень раствора в сосуде?



Поясняющий рисунок: три состояния содержимого сосуда, высоты — в сантиметрах.

▲ **Решение.** **Что происходит.** Лёд плавает и дна не касается, поэтому всё содержимое сосуда давит на дно своим весом: давление на дно пропорционально полной массе содержимого. По подъёму уровня находим, сколько льда (по массе) добавили, а значит, во сколько раз разбавили соду. Масса соды при этом не меняется. После таяния масса содержимого прежняя, поэтому и давление на дно прежнее — отсюда новая высота.

Обозначения. S — площадь дна, $h_0 = 15{,}0$ см, $h_1 = 20{,}0$ см — уровни до и после добавления льда, $\rho_1 = 1{,}12$ г/см^3 — исходная плотность, M — масса исходного раствора, m — масса льда, α_1, α_2 — доли соды до и после, ρ_2 и H — искомые плотность и уровень.

1. Исходная концентрация. Из формулы $\rho_1 = \rho_0(1 + \alpha_1)$:

$$\alpha_1 = \frac{\rho_1}{\rho_0} - 1 = 0{,}12 = 12\%.$$

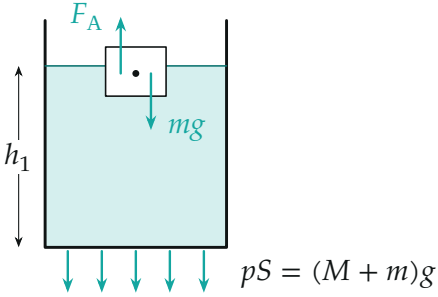
Это внутри интервала 1–14%, где формула применима.

2. Масса льда. Сосуд цилиндрический, жидкость покоится, поэтому давление на дно $p = \rho g h$ (жидкость под льдом та же, плотности ρ_1). С другой стороны, дно держит всё содержимое: сила давления pS равна весу раствора и льда (лёд плавает, его вес передаётся дну через жидкость; масса лёгкого сосуда не входит). До и после добавления льда:

$$\rho_1 g h_0 S = Mg, \qquad \rho_1 g h_1 S = (M + m)g.$$

Разделим второе на первое:

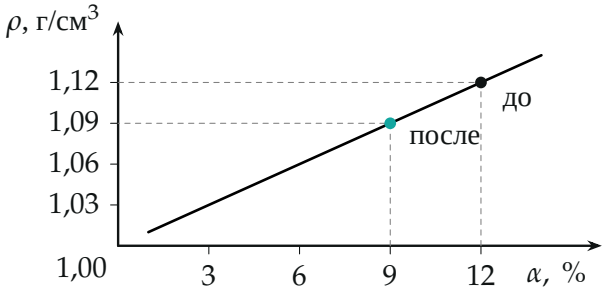
$$\frac{M + m}{M} = \frac{h_1}{h_0} = \frac{4}{3}, \qquad m = \frac{M}{3}.$$



Плавающий лёд: $F_A = mg$, вода передаёт эту силу дну, и дно держит вес всего содержимого.

3. Новая концентрация и плотность. Масса соды $\alpha_1 M$ не изменилась, а масса раствора стала $M + m = \frac{4}{3}M$:

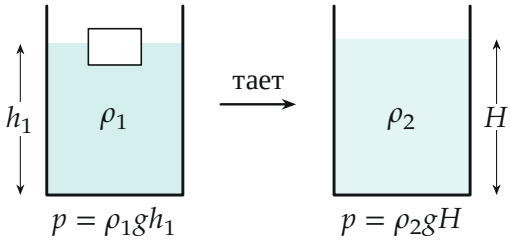
$$\alpha_2 = \frac{\alpha_1 M}{\frac{4}{3}M} = \frac{3}{4}\alpha_1 = 0{,}09 = 9\%, \qquad \rho_2 = \rho_0(1 + \alpha_2) = 1{,}09 \text{ г/см}^3.$$



Плотность по формуле условия: доля соды уменьшилась в 4/3 раза — с 12% до 9%.

4. Новый уровень. При таянии и перемешивании масса содержимого не меняется, значит, не меняется и сила давления на дно, и давление $p = \dfrac{(M+m)g}{S}$. Запишем его до таяния и после:

$$\rho_1 g h_1 = \rho_2 g H \quad \Rightarrow \quad H = \frac{\rho_1}{\rho_2} h_1 = \frac{1{,}12}{1{,}09} \cdot 20{,}0 \text{ см} = 20{,}6 \text{ см}.$$



Масса содержимого та же — давление на дно то же: менее плотный раствор стоит выше.

Обратите внимание: уровень после таяния не возвращается к 20 см, как было бы с пресной водой и пресным льдом. Талая вода разбавила раствор, плотность упала, и тот же вес занимает больший объём.

Проверка. Объём раствора после таяния $\dfrac{M+m}{\rho_2} = \dfrac{\frac{4}{3}\rho_1 h_0 S}{\rho_2} = \dfrac{4\cdot 1{,}12\cdot 15}{3\cdot 1{,}09}S = 20{,}55\,S$ — тот же уровень другим путём. Предел: если бы раствор был пресной водой ($\rho_1 = \rho_2 = \rho_0$), получилось бы $H = h_1$ — известный результат «уровень при таянии плавающего льда не меняется».

Ответ. $\rho_2 = \rho_0\left(1 + \dfrac{h_0}{h_1}\left(\dfrac{\rho_1}{\rho_0} - 1\right)\right) = 1{,}09$ г/см^3; уровень $H = \dfrac{\rho_1}{\rho_2}h_1 \approx$ 20,6 см.