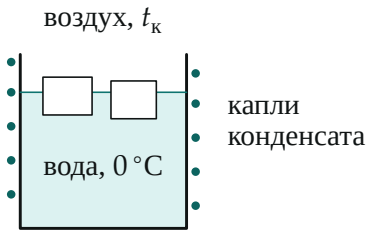
Запотевший сосуд

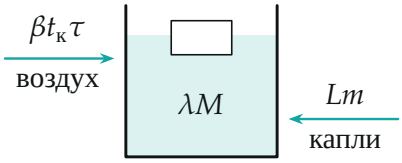
Задача 4. [МОШ 2023/24, заключительный этап, 8 класс, задача 4] В холодильной камере при температуре 0 °C находится сосуд с водой и льдом. Если переместить этот сосуд в помещение, то на стенках сосуда к моменту, когда весь лёд растает, образуются капельки сконденсированной воды (сосуд запотевает). Масса воды, сконденсированной на стенках сосуда, зависит от температуры воздуха в комнате. Например, если температура воздуха в комнате равна 22 °C, то сконденсируется 23 г воды, а при температуре 30 °C сконденсируется 18 г воды. Определите массу льда в сосуде. Удельная теплота плавления льда равна 330 кДж/кг, а удельная теплота парообразования воды 2,3 МДж/кг. Считайте, что конвекция отсутствует, мощность теплообмена пропорциональна разности температур сосуда с его содержимым и воздуха, а скорость образования конденсата в обоих случаях одинаковая.



Поясняющий рисунок: сосуд с водой и льдом в тёплой комнате, на стенках оседают капли.

▲ **Решение.** **Что происходит.** Пока в сосуде есть лёд, его содержимое держится при 0 °C. Тепло для плавления приходит двумя путями: теплообменом с воздухом (мощность пропорциональна $t_к$) и при конденсации пара на холодных стенках (теплота L на каждый килограмм капель). Конденсат растёт с одинаковой скоростью, поэтому его масса — это «часы»: она пропорциональна времени таяния. В тёплой комнате тепло от воздуха идёт быстрее, лёд тает быстрее, и капель успевает набраться меньше — так и в условии. Класс задачи — тепловой баланс с неизвестным коэффициентом: два опыта дают два уравнения, неизвестный коэффициент уходит.

Обозначения. M — масса льда, $\lambda = 330$ кДж/кг, $L = 2{,}3$ МДж/кг, $t_0 = 0\,^\circ$C; $t_1 = 22\,^\circ$C, $m_1 = 23$ г и $t_2 = 30\,^\circ$C, $m_2 = 18$ г — два опыта; τ_1, τ_2 — время таяния; мощность теплообмена $P = \beta(t_к - t_0)$, скорость конденсации $\mu = m/\tau$ (одна и та же).



Два притока тепла за время таяния: от воздуха и от конденсации. Оба идут на плавление льда.

1. Тепловой баланс. Запишем закон сохранения энергии для содержимого сосуда за всё время таяния (температура содержимого не меняется, тепло идёт только на плавление; в теплообмене участвуют стенки, вода и лёд при $0\,^\circ$C):

$$\beta(t_1 - t_0)\tau_1 + Lm_1 = \lambda M, \qquad \beta(t_2 - t_0)\tau_2 + Lm_2 = \lambda M.$$

Неизвестны β, τ_1, τ_2 и M — уравнений не хватает, нужна связь времён.

2. Время — через массу капель. Скорость конденсации одна и та же, поэтому $\tau_1 = m_1/\mu$, $\tau_2 = m_2/\mu$. Обозначим $\gamma = \beta/\mu$ — тепло от воздуха на градус, приходящееся на килограмм капель. Тогда (с $t_0 = 0$)

$$(\gamma t_1 + L)\, m_1 = \lambda M, \qquad (\gamma t_2 + L)\, m_2 = \lambda M.$$

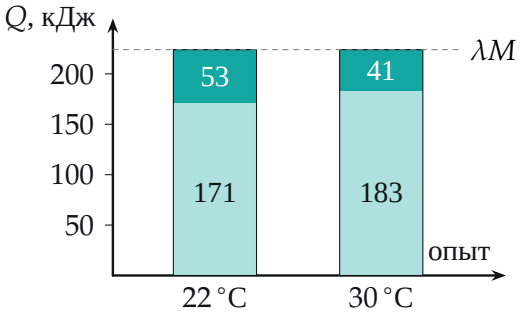
3. Решаем. Приравняем левые части и найдём γ:

$$\gamma = \frac{L(m_1 - m_2)}{m_2 t_2 - m_1 t_1} = \frac{2{,}3 \cdot 10^6 \cdot 5}{540 - 506}\ \frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot {}^\circ\text{C}} \approx 3{,}38 \cdot 10^5\ \frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot {}^\circ\text{C}}.$$

Подставим в любое из уравнений баланса и соберём ответ:

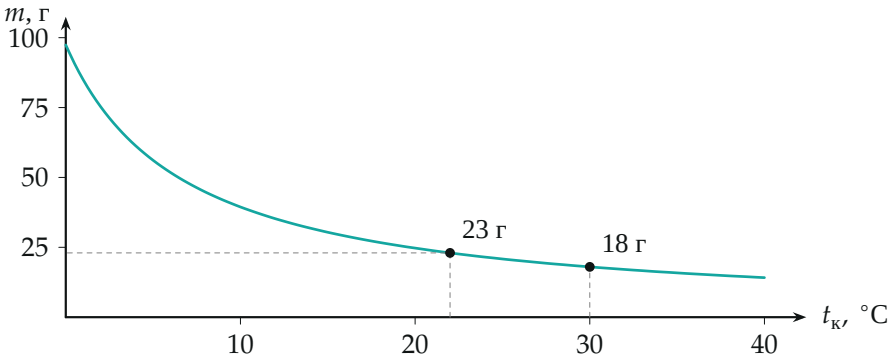
$$M = \frac{(\gamma t_1 + L)m_1}{\lambda} = \frac{L\, m_1 m_2\, (t_2 - t_1)}{\lambda\, (m_2 t_2 - m_1 t_1)},$$

$$M = \frac{2{,}3 \cdot 10^6 \cdot 0{,}023 \cdot 0{,}018 \cdot 8}{3{,}3 \cdot 10^5 \cdot 0{,}034}\ \text{кг} \approx 0{,}68\ \text{кг}.$$



Тепловой баланс в цифрах: светлое — тепло от воздуха, тёмное — от конденсации Lm. Сумма в обоих опытах одна, $\lambda M \approx 224$ кДж.

4. Как масса капель зависит от температуры комнаты. Из баланса $m = \dfrac{\lambda M}{\gamma t_к + L}$: чем теплее, тем быстрее приходит тепло от воздуха и тем меньше капель успевает осесть. Кривая проходит через обе точки условия.



Масса конденсата $m(t_к)$ по найденным M и γ. При $t_к \to 0$ всё тепло дала бы конденсация: $m = \lambda M / L \approx 97$ г.

Обратите внимание: масса конденсата — не только «приток тепла», но и мера времени таяния. Без этой связи задача не решается: на каждый опыт приходится лишнее неизвестное τ.

Проверка. Размерность: $\dfrac{\text{Дж/кг} \cdot \text{кг}^2 \cdot {}^\circ\text{C}}{\text{Дж/кг} \cdot \text{кг} \cdot {}^\circ\text{C}} = \text{кг}$. Второе уравнение баланса: $(3{,}38 \cdot 10^5 \cdot 30 + 2{,}3 \cdot 10^6) \cdot 0{,}018 = 2{,}24 \cdot 10^5$ Дж $= \lambda M$ — то же, что из первого. Знак: $m_2 t_2 > m_1 t_1$, поэтому $\gamma > 0$, как и должно быть.

Ответ. $M = \dfrac{L\, m_1 m_2\, (t_2 - t_1)}{\lambda\, (m_2 t_2 - m_1 t_1)} \approx 680$ г.