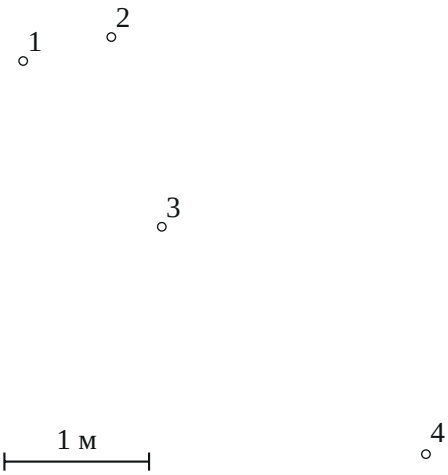
Построение

Задача 1. [МОШ 2023/24, заключительный этап, 9 класс, задача 1] Обруч скользит по гладкой горизонтальной поверхности так, что плоскость обруча остаётся горизонтальной. Скорость оси обруча и частота его обращения вокруг этой оси, равная одному обороту в секунду, со временем не меняются. В некоторой точке обруча закреплена лампочка, ярко вспыхивающая через равные промежутки времени с частотой 4 раза в секунду. На фотографии, сделанной сверху с большой выдержкой, с сохранением пропорций изображаемых предметов, можно видеть положение лампочки во время вспышек, следующих друг за другом. Рисунок, представленный ниже (увеличенную версию см. на дополнительном листе), выполнен по фотографии, на нём точками обозначены места вспышек, а цифрами их номера в порядке появления.



Используя линейку с делениями и циркуль, найдите скорость оси и радиус обруча. Отрезок, соответствующий расстоянию в 1 метр, показан в нижней части рисунка.

▲ **Решение. Что происходит.** Движение обруча — сумма двух движений: ось едет равномерно по прямой, а лампочка вращается вокруг оси

по окружности радиуса R с одним оборотом в секунду. Между вспышками проходит $\frac{1}{4}$ с — ровно четверть оборота. Значит, вспышки 1 и 3 (как и 2 и 4) разделены половиной оборота: лампочка оказывается в диаметрально противоположной точке обруча. Главная идея — сложение перемещений (закон сложения скоростей): положение лампочки = положение оси + вектор «ось → лампочка». Класс задачи — кинематика вращающегося и поступательно движущегося тела, графическое построение.

Обозначения. $\tau = \frac{1}{4}$ с — промежуток между вспышками; $\vec{r}_n$ — положение лампочки при вспышке n, O_n ($\vec{R}_n$) — положение оси в тот же момент; $\vec{v}$ — скорость оси; $\vec{a}$ — вектор от оси к лампочке при вспышке 1, $\vec{b}$ — при вспышке 2 (рис. 2).

1. Связь точек 1 и 3. За время 2τ ось сместилась на $2\vec{v}\tau$, а вектор «ось → лампочка» повернулся на пол-оборота и стал $-\vec{a}$:

$$\vec{r}_1 = \vec{R}_1 + \vec{a}, \qquad \vec{r}_3 = \vec{R}_1 + 2\vec{v}\tau - \vec{a}.$$

Складываем и делим пополам — вектор $\vec{a}$ сокращается:

$$\frac{\vec{r}_1 + \vec{r}_3}{2} = \vec{R}_1 + \vec{v}\tau = \vec{R}_2.$$

Середина отрезка 13 — положение оси O_2 в момент второй вспышки. Точно так же для вспышек 2 и 4 (вектор $\vec{b}$ и $-\vec{b}$):

$$\frac{\vec{r}_2 + \vec{r}_4}{2} = \vec{R}_2 + \vec{v}\tau = \vec{R}_3,$$

середина отрезка 24 — положение оси O_3 при третьей вспышке.

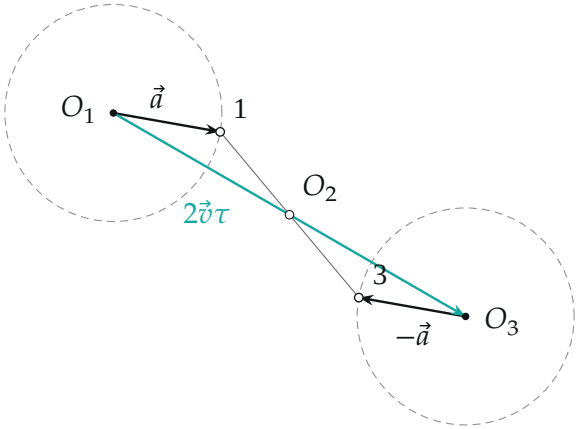


Рис. 2. Вспышки 1 и 3: ось сместилась на $2\vec{v}\tau$ (бирюзовый вектор), вектор «ось → лампочка» сменил знак. Середина отрезка 13 совпадает с серединой отрезка O_1O_3 — это положение оси O_2. Пунктир — обруч при вспышках 1 и 3.

2. Построение. Циркулем и линейкой строим середины отрезков 13 и 24 — точки O_2 и O_3 (рис. 3). Тогда:

— радиус обруча — расстояние от оси до лампочки в один и тот же момент: $R = O_2\,2$ (или $O_3\,3$, контроль);

— за время τ ось прошла путь O_2O_3, поэтому $v = \dfrac{O_2O_3}{\tau}$.

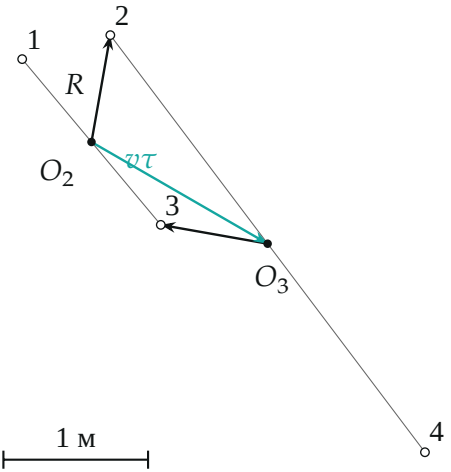


Рис. 3. Построение: O_2 и O_3 — середины отрезков 13 и 24, $R = O_2 2$, путь оси за τ — O_2O_3.

3. Измерения. Линейкой сравниваем найденные отрезки с отрезком «1 м». На нашем рисунке отрезок 1 м имеет длину 54,4 условных единицы, $O_2 2 = 40{,}8$, $O_3 3 = 40{,}8$ (контроль сошёлся), $O_2O_3 = 76{,}5$. Получаем

$$R = \frac{40{,}8}{54{,}4}\ \text{м} \approx 0{,}75\ \text{м}, \qquad O_2O_3 = \frac{76{,}5}{54{,}4}\ \text{м} \approx 1{,}41\ \text{м},$$

$$v = \frac{O_2O_3}{\tau} = \frac{1{,}41\ \text{м}}{0{,}25\ \text{с}} \approx 5{,}6\ \text{м/с}.$$

Точность построения на листе — около миллиметра, отсюда погрешность ответа: $\pm 0{,}05$ м для R и $\pm 0{,}5$ м/с для v (разброс по разным распечаткам рисунка; у организаторов по их листу $v \approx 5{,}7$ м/с).

4. Проверка построением всей траектории. Зная O_2, $\vec{v}\tau$ и $\vec{b} = \overrightarrow{O_2 2}$, можно восстановить положения оси O_1 и O_4 и проверить, что вектор «ось → лампочка» поворачивается за τ ровно на 90°: углы векторов $\overrightarrow{O_n n}$ к горизонтали равны $-10°$, 80°, 170°, 260°. Обруч вращается против часовой стрелки. Траектория лампочки, построенная по формуле $\vec{r}(t) = \vec{R}_2 + \vec{v}(t - t_2) + \vec{R}_{\text{пов}}(t)$, проходит через все четыре вспышки (рис. 4).

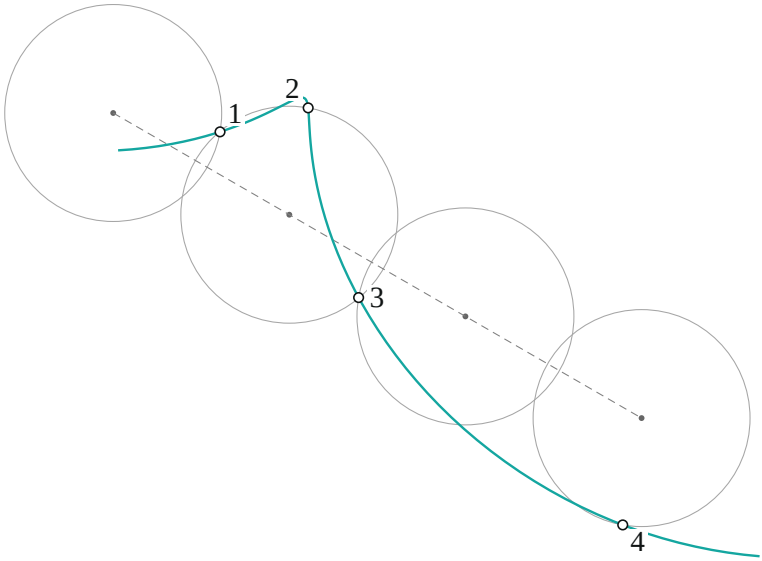


Рис. 4. Положения обруча при четырёх вспышках (серые окружности, центры на одной прямой через равные промежутки) и траектория лампочки (бирюзовая), посчитанная по найденным R и v: она проходит через все точки фотографии.

Обратите внимание. Лампочка движется не по окружности и не по прямой, поэтому ни расстояние между соседними точками, ни расстояние 1–3 само по себе не равно ни диаметру, ни пути оси. Работает только комбинация: $\vec{a}$ и $-\vec{a}$ при сложении сокращаются.

Ответ матрёшкой. $O_2 = \dfrac{\vec{r}_1 + \vec{r}_3}{2}$, $O_3 = \dfrac{\vec{r}_2 + \vec{r}_4}{2}$; $R = |O_2 2|$, $v = 4 \cdot |O_2 O_3|$ (в масштабе рисунка).

Проверка. Контроль построения: $O_3 3 = O_2 2$ и $\overrightarrow{O_3 3} \perp \overrightarrow{O_2 2}$ — оба выполнены. Скорость лампочки относительно оси $2\pi R \cdot 1\ \text{с}^{-1} \approx 4{,}7$ м/с меньше v, поэтому траектория без петель — как и видно на рис. 4.

Ответ. $R \approx 0{,}75$ м ($\pm 0{,}05$ м), $v \approx 5{,}6$ м/с ($\pm 0{,}5$ м/с).