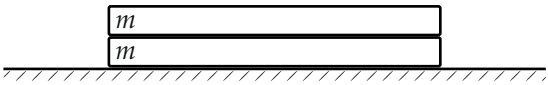
И покой, и скольжение

Задача 2. [МОШ 2023/24, заключительный этап, 9 класс, задача 2] Изучая силу трения в рамках школьного курса физики, обычно говорят о том, что максимальное значение силы трения покоя равно силе трения скольжения. На самом деле, для того, чтобы вывести тело из состояния покоя, необходимо приложить силу несколько большую силы трения скольжения. Поэтому имеет смысл говорить о двух коэффициентах: коэффициенте трения покоя μ_r и коэффициенте трения скольжения μ_s ($\mu_s < \mu_r$). Сила трения покоя удовлетворяет соотношению $F_{\text{тр.пок.}} \leqslant \mu_r N$. После перехода к скольжению для определения силы трения используется другой коэффициент $F_{\text{тр.ск.}} = \mu_s N$.

А. (4 балла) Для деревянного бруска массой m, располагающегося на протяжённой деревянной горизонтальной поверхности, коэффициенты трения покоя и скольжения равны $\mu_r = 0{,}5$ и $\mu_s = 0{,}4$ соответственно. На брусок начинает действовать периодически изменяющаяся горизонтальная сила, проекция которой на горизонтальную ось OX на первой половине периода равна $F_x^{(1)} = 1{,}001\mu_r mg$, а на второй половине периода меняет знак и становится равна $F_x^{(2)} = -1{,}001\mu_r mg$. Изобразите графически зависимость скорости бруска от времени в течение двух периодов спустя большое время после начала процесса. Период изменения силы равен $T = 4$ с, ускорение свободного падения равно 10 м/с^2.

Б. (5 баллов) Две доски одинаковой массы m лежат друг на друге и на длинном горизонтальном деревянном столе (см. рисунок). Коэффициенты трения покоя и скольжения между всеми поверхностями равны $\mu_r = 0{,}5$ и $\mu_s = 0{,}4$.



Б1) (2 балла) На верхнюю доску действует внешняя горизонтальная сила $F(t)$, прямо пропорциональная времени $F(t) = \dfrac{\mu_r mgt}{t_0}$. Изобразите график зависимости ускорения верхней доски от времени для $t \in [0, 4t_0]$.

Б2) (3 балла) Пусть теперь внешняя горизонтальная сила $F(t) = \dfrac{\mu_r m g t}{t_0}$ действует на нижнюю доску. Изобразите график зависимости ускорения нижней доски от времени для $t \in [0, 4t_0]$.

В обоих случаях доски изначально покоятся. В процессе движения одна доска не падает с другой.

▲ **Решение.** **Что происходит.** Тело, стоящее на месте, удерживает трение покоя до $\mu_r N$; стоит ему сорваться, трение падает до $\mu_s N$, и тело ускоряется рывком. В части А сила чуть больше порога срыва, поэтому брусок всегда срывается, а дальше его ускорение зависит от того, куда он едет: по силе — трение мешает слабо, против силы — трение и сила тормозят вместе. В части Б нужно по очереди проверить, какая поверхность сорвётся первой. Главный закон — второй закон Ньютона в проекции на горизонтальную ось для каждого тела с правильно выбранным видом трения. Класс задачи — динамика с сухим трением и сменой режимов.

Обозначения. Ось x — горизонтально вправо; v и a — проекции скорости и ускорения; $g = 10$ м/с^2; во всех случаях $N = mg$ для одного тела на опоре и $N = 2mg$ для пары досок на столе (вертикальных ускорений нет).

Часть А.

1. Два ускорения. Сила $F = 1{,}001\mu_r mg \approx 0{,}5mg$ чуть больше максимальной силы трения покоя $\mu_r mg$: стоящий брусок удержаться не может и всегда срывается в сторону силы. При скольжении трение $\mu_s mg = 0{,}4mg$ направлено против скорости (рис. 2). Второй закон Ньютона в проекции на направление скорости:

— брусок едет *по* силе: $ma_1 = F - \mu_s mg$, $a_1 \approx (\mu_r - \mu_s)g = 1$ м/с^2 — медленный разгон;

— брусок едет *против* силы (сила только что сменила знак): сила и трение тормозят вместе, $ma_2 = F + \mu_s mg$, $a_2 \approx (\mu_r + \mu_s)g = 9$ м/с^2 — быстрое торможение.

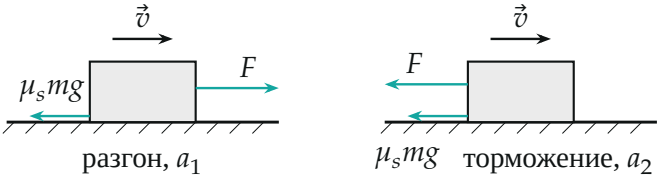


Рис. 2. Горизонтальные силы на брусок. Слева — брусок едет по силе, трение скольжения $\mu_s mg$ против скорости; справа — сила сменила знак, а брусок ещё едет вправо: сила и трение направлены одинаково.

2. Как меняется скорость за полупериод. Пусть в начале полупериода брусок едет против новой силы со скоростью v_k. Он тормозит с a_2 за время $\dfrac{v_k}{a_2}$, останавливается, тут же срывается в сторону силы и разгоняется с a_1 до конца полупериода $\dfrac{T}{2} = 2$ с:

$$v_{k+1} = a_1\left(\frac{T}{2} - \frac{v_k}{a_2}\right) = 2\text{ м/с} - \frac{v_k}{9}.$$

Первый полупериод начинается с покоя: $v_1 = 2$ м/с, затем $v_2 = 1{,}78$, $v_3 = 1{,}80$ м/с…

3. Установившийся режим. Пусть u — предельная скорость: $u = 2 - \dfrac{u}{9}$, $u = 1{,}8$ м/с. Отклонение $w_k = v_k - u$ подчиняется $w_{k+1} = -\dfrac{w_k}{9}$: за каждый полупериод оно уменьшается в 9 раз и меняет знак, через несколько периодов его не видно. Значит, спустя большое время в каждом полупериоде брусок тормозит от $u = 1{,}8$ м/с до нуля за

$$\tau = \frac{u}{a_2} = 0{,}2\text{ с} = \frac{T}{20}$$

и разгоняется в обратную сторону за $\dfrac{T}{2} - \tau = 1{,}8\text{ с} = 9\tau$ снова до 1,8 м/с. График — пила (рис. 3).

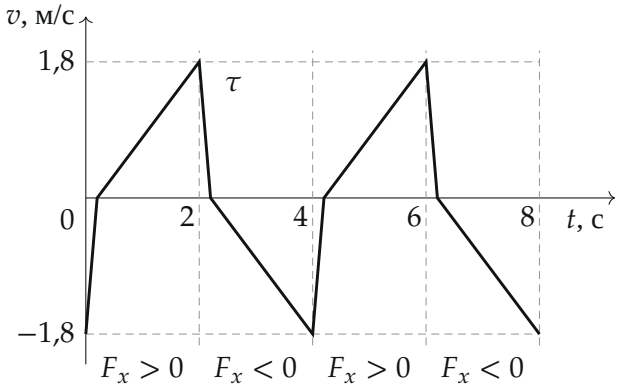


Рис. 3. Установившаяся зависимость $v(t)$ за два периода: крутой спад за $\tau = 0{,}2$ с ($a_2 = 9$ м/с^2) и пологий рост за $1{,}8$ с ($a_1 = 1$ м/с^2). Момент $t = 0$ выбран в начале полупериода с $F_x > 0$.

Часть Б1. Сила на верхней доске.

1. Нижняя доска стоит всегда. На неё сверху действует трение со стороны верхней доски, не больше $\mu_r mg = 0{,}5mg$ (а при скольжении — $0{,}4mg$). Стол может удержать её трением покоя до $\mu_r \cdot 2mg = mg$. Этого всегда хватает.

2. Верхняя доска. Пока $F \leqslant \mu_r mg$, то есть $t \leqslant t_0$, она стоит: $a = 0$. При $t > t_0$ срывается; второй закон Ньютона в проекции на x:

$$ma = F - \mu_s mg \quad \Rightarrow \quad a(t) = \frac{\mu_r g t}{t_0} - \mu_s g = \left(5\frac{t}{t_0} - 4\right) \text{ м/с}^2.$$

В момент срыва ускорение скачком становится 1 м/с^2, к $t = 4t_0$ дорастает до 16 м/с^2 (рис. 4).

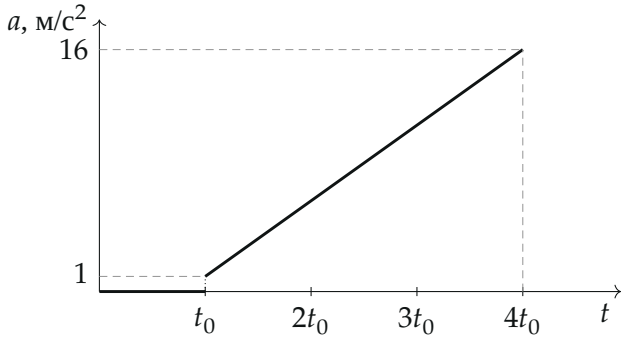


Рис. 4. Б1: ускорение верхней доски. До t_0 — покой, затем скачок до 1 м/с^2 и линейный рост.

Часть Б2. Сила на нижней доске.

1. Срыв со стола. Пока доски покоятся, удерживает трение покоя стола — до $\mu_r \cdot 2mg = mg$. Сила дорастает до mg при $\dfrac{\mu_r t}{t_0} = 1$, то есть при $t_1 = 2t_0$. До этого $a = 0$.

2. Доски едут вместе. Пусть верхняя доска не проскальзывает. Второй закон Ньютона для системы двух досок (трение между ними внутреннее) в проекции на x, трение стола скольжения $\mu_s \cdot 2mg$ (рис. 5):

$$2ma = F - 2\mu_s mg \quad \Rightarrow \quad a = \frac{\mu_r g t}{2t_0} - \mu_s g = \left(2{,}5\frac{t}{t_0} - 4\right) \text{ м/с}^2.$$

При $t = 2t_0$ ускорение скачком становится 1 м/с^2.

3. Когда начнётся проскальзывание. Верхнюю доску разгоняет только трение покоя со стороны нижней; по второму закону Ньютона для верхней доски $ma = F_{\text{тр}} \leqslant \mu_r mg$, то есть совместное движение возможно при $a \leqslant \mu_r g = 5$ м/с^2:

$$2{,}5\frac{t}{t_0} - 4 = 5 \quad \Rightarrow \quad t_2 = 3{,}6t_0, \qquad F = 2(\mu_r + \mu_s)mg = 1{,}8mg.$$

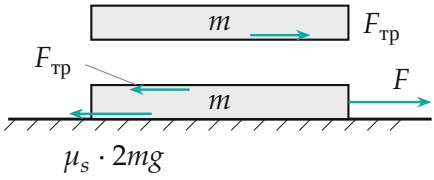


Рис. 5. Б2: горизонтальные силы на доски (доски разнесены для наглядности). Нижнюю тянет F, тормозят трение стола и трение со стороны верхней доски; верхнюю разгоняет только $F_{тр}$ — по третьему закону Ньютона такая же сила, но направленная вперёд.

4. После проскальзывания. Трение между досками становится трением скольжения $\mu_s mg$: верхняя доска едет с $a_в = \mu_s g = 4$ м/с^2, а нижняя по второму закону Ньютона

$$ma = F - \mu_s \cdot 2mg - \mu_s mg \quad \Rightarrow \quad a(t) = \frac{\mu_r g t}{t_0} - 3\mu_s g = \left(5\frac{t}{t_0} - 12\right) \text{ м/с}^2.$$

При $t = 3{,}6t_0$ ускорение скачком растёт с 5 до 6 м/с^2, при $t = 4t_0$ равно 8 м/с^2 (рис. 6).

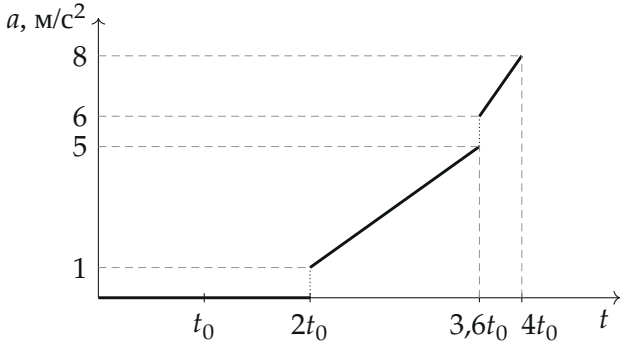


Рис. 6. Б2: ускорение нижней доски. Покой до $2t_0$, совместное движение до $3{,}6t_0$, затем скачок с 5 до 6 м/с^2 — верхняя доска проскальзывает и тормозит нижнюю уже слабее.

Обратите внимание. В части А брусок никогда не стоит дольше мгновения: сила превышает порог срыва. В Б2 при проскальзывании

ускорение нижней доски растёт скачком: верхняя доска перестаёт «висеть» на нижней всей своей инерцией, тянет назад только трение скольжения.

Ответ матрёшкой. А: $a_{1,2} = (\mu_r \mp \mu_s)g$, $u = \dfrac{a_1 T/2}{1 + a_1/a_2} = 1{,}8$ м/с. Б1: $a = \dfrac{\mu_r g t}{t_0} - \mu_s g$ при $t > t_0$. Б2: $a = \dfrac{\mu_r g t}{2t_0} - \mu_s g$ на $(2t_0;\ 3{,}6t_0)$, $a = \dfrac{\mu_r g t}{t_0} - 3\mu_s g$ на $(3{,}6t_0;\ 4t_0]$.

Проверка. В А площадь под графиком за период равна нулю — брусок в среднем стоит на месте, как и должно быть при симметричной силе; численный пересчёт последовательности $v_{k+1} = 2 - v_k/9$ даёт 1,800 м/с уже на шестом полупериоде. В Б2 при $t = 3{,}6t_0$ формулы для совместного движения и проскальзывания дают для верхней доски одно и то же требуемое трение $\mu_r mg$ — граница найдена верно. Размерность: $\dfrac{\mu_r g t}{t_0}$ — ускорение.

Ответ. А) пилообразный периодический график (рис. 3): за 0,2 с скорость спадает от 1,8 м/с до нуля, за следующие 1,8 с растёт до 1,8 м/с в обратную сторону; Б1) $a = 0$ при $t < t_0$, далее $a = \dfrac{\mu_r g t}{t_0} - \mu_s g$, от 1 до 16 м/с^2 (рис. 4); Б2) $a = 0$ при $t < 2t_0$, затем $a = \dfrac{\mu_r g t}{2t_0} - \mu_s g$ (от 1 до 5 м/с^2 при $t = 3{,}6t_0$), затем $a = \dfrac{\mu_r g t}{t_0} - 3\mu_s g$ (от 6 до 8 м/с^2 при $t = 4t_0$) (рис. 6).