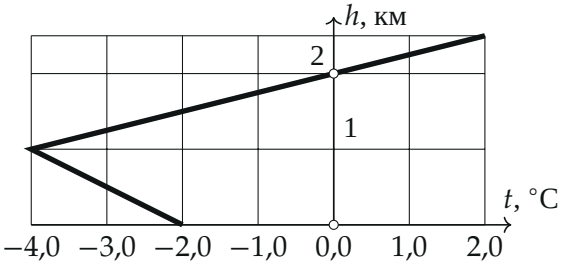
Замерзающие капли

Задача 3. [МОШ 2023/24, заключительный этап, 9 класс, задача 3] При *температурной инверсии* график зависимости температуры воздуха t вблизи поверхности Земли от высоты h может иметь вид, показанный на рисунке линией чёрного цвета увеличенной толщины.



Пусть капля, имеющая форму шара, движется вниз с постоянной скоростью под действием силы тяжести и силы сопротивления воздуха. На высоте $h_0 = 2$ км температура капли оказывается равна $t_c = 0\,^\circ\text{C}$. В процессе дальнейшего падения часть капли (или вся капля) превращается в лёд вследствие теплообмена с холодным атмосферным воздухом.

Мощность теплообмена P и сила сопротивления воздуха F_d даются формулами

$$P = \alpha(t_c - t)S, \qquad F_d = \beta S v^2,$$

где S — площадь поверхности капли, α и β — некоторые константы, t и t_c — температуры окружающего воздуха и капли (на одной высоте), v — скорость капли.

Рассмотрим две капли. Радиус первой капли в 2,25 раз меньше радиуса второй. В процессе падения с высоты 2 км первой капли четверть её массы превращается в лёд. Какая часть массы второй капли превратится в лёд?

Считайте теплопроводность льда высокой, так что температура всех точек капли остаётся одинаковой, пока капля полностью не превратилась в лёд. Изменением радиуса капли при её частичном превращении в лёд можно пренебречь.

▲ **Решение. Что происходит.** Капля — смесь воды и льда при $0\,^\circ\mathrm{C}$. Пока в ней есть вода, температура не меняется, и всё тепло, которое уносит холодный воздух, берётся из кристаллизации: замерзает новая порция воды. Сколько тепла уйдёт, зависит от того, как долго капля летит через холодный слой, то есть от её скорости, и от площади поверхности. Главные законы — уравнение теплового баланса для капли и условие равномерного падения (второй закон Ньютона, сумма сил равна нулю). Класс задачи — теплообмен плюс масштабирование (как ответ зависит от размера).

Обозначения. R — радиус капли, $M = \rho \cdot \frac{4}{3}\pi R^3$ — её масса (ρ — плотность воды; лёд почти не меняет массу и размер), $S = 4\pi R^2$; λ — удельная теплота кристаллизации; $\Delta T(h) = t_c - t(h) = -t(h)$ — на сколько воздух на высоте h холоднее капли; m — масса образовавшегося льда, $n = \frac{m}{M}$ — его доля.

1. Скорость падения. Капля падает равномерно, по второму закону Ньютона в проекции на вертикаль сила тяжести уравновешена сопротивлением (рис. 2):

$$Mg = \beta S v^2 \quad \Rightarrow \quad v^2 = \frac{Mg}{\beta S} = \frac{\rho g}{\beta} \cdot \frac{\frac{4}{3}\pi R^3}{4\pi R^2} = \frac{\rho g R}{3\beta}, \qquad v \propto \sqrt{R}.$$

Крупная капля падает быстрее: тяжесть растёт как объём, а сопротивление — только как площадь.

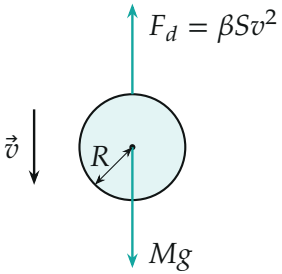


Рис. 2. Силы на каплю при равномерном падении.

2. Тепловой баланс на малом участке. За малое время $\Delta\tau$ капля опускается на $\Delta h = v\Delta\tau$ и отдаёт воздуху теплоту $P\Delta\tau = \alpha\Delta T(h)S\Delta\tau$. Её температура не меняется, поэтому эта теплота — теплота кристаллизации замёрзшей массы Δm:

$$\lambda\Delta m = \alpha\,\Delta T(h)\,S\,\frac{\Delta h}{v} \quad\Rightarrow\quad \Delta m = \frac{\alpha S}{\lambda v}\,\Delta T(h)\,\Delta h.$$

3. Сумма по пути. Множитель $\dfrac{\alpha S}{\lambda v}$ на всём пути постоянен, поэтому

$$m = \frac{\alpha S}{\lambda v}\,\Pi, \qquad \Pi = \sum \Delta T(h)\,\Delta h.$$

Π — площадь фигуры между графиком $t(h)$ и осью $t = 0$ от земли до высоты 2 км (рис. 3). Она задана погодой и *одинакова для обеих капель*. По графику

$$\Pi = \frac{2+4}{2}\cdot 1 + \frac{4+0}{2}\cdot 1 = 5\ ^\circ\text{C}\cdot\text{км},$$

но для ответа её значение не понадобится.

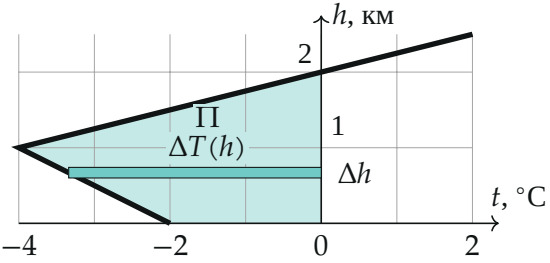


Рис. 3. Полоска высоты Δh даёт вклад $\Delta T\,\Delta h$; сумма — закрашенная площадь Π между графиком и осью h от земли до 2 км.

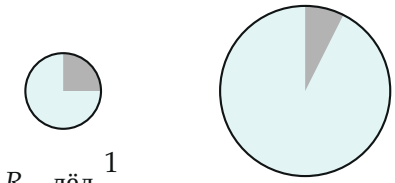
4. Доля льда. Делим на массу капли и подставляем $S \propto R^2$, $M \propto R^3$, $v \propto R^{1/2}$:

$$n = \frac{m}{M} = \frac{\alpha\Pi}{\lambda}\cdot\frac{S}{Mv} \propto \frac{R^2}{R^3\cdot R^{1/2}} = R^{-3/2}.$$

У крупной капли меньше поверхности на единицу массы и она быстрее пролетает холодный слой — замерзает меньшая доля (рис. 4).

5. Ответ. Радиусы отличаются в $2{,}25 = \left(\frac{3}{2}\right)^2$ раза, поэтому

$$\frac{n_2}{n_1} = \left(\frac{R_1}{R_2}\right)^{3/2} = \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{8}{27}, \qquad n_2 = \frac{1}{4}\cdot\frac{8}{27} = \frac{2}{27} \approx 7{,}4\,\%.$$



R_1, лёд $\frac{1}{4}$ $R_2 = 2{,}25R_1$, лёд $\frac{2}{27}$

Рис. 4. Доли льда (серые секторы) в двух каплях; радиусы — в масштабе.

Обратите внимание. Площадь под графиком температуры не зависит от капли — поэтому ни α, ни β, ни λ, ни форма профиля температуры знать не нужно. Формула справедлива, пока капля замёрзла не целиком: у первой капли замёрзла лишь четверть, у второй — ещё меньше.

Ответ матрёшкой. $n = \dfrac{3\alpha\Pi}{\lambda\rho R}\sqrt{\dfrac{3\beta}{\rho g R}} \propto R^{-3/2}$, $n_2 = n_1\left(\dfrac{R_1}{R_2}\right)^{3/2}$.

Проверка. Размерность $\dfrac{\alpha S\Pi}{\lambda v}$: $[\alpha] = \dfrac{\text{Вт}}{\text{м}^2\cdot\text{К}}$, $\dfrac{\text{Вт}}{\text{м}^2\cdot\text{К}}\cdot\text{м}^2\cdot\text{К}\cdot\text{м}\cdot\dfrac{\text{с}}{\text{м}}\cdot\dfrac{\text{кг}}{\text{Дж}} =$ кг — масса. Знак и смысл: при $R_2 > R_1$ доля меньше, $n_2 < n_1$, как и ожидалось. Численно $\frac{1}{4}\cdot 2{,}25^{-1{,}5} = 0{,}0741$.

Ответ. $n_2 = \dfrac{2}{27} \approx 7{,}4\,\%$.