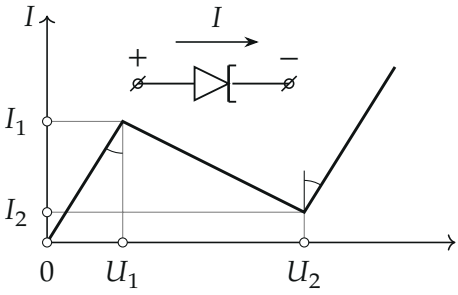
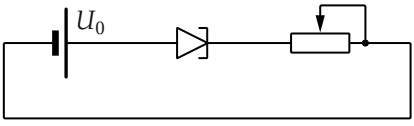
Схемы с туннельным диодом

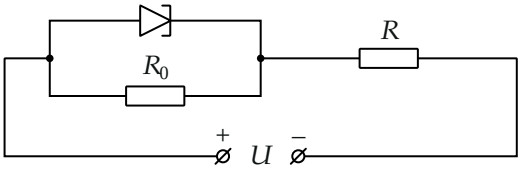
Задача 4. [МОШ 2023/24, заключительный этап, 9 класс, задача 4] Идеализированная вольт-амперная характеристика нелинейного элемента под названием *туннельный диод* изображена на рисунке, представленном ниже. Условное обозначение туннельного диода на схемах показано в верхней части рисунка. Там же над символом диода указано положительное направление тока через него. Обозначенные на графике токи и напряжения I_1, I_2, U_1 и U_2 будем называть параметрами диода. Обозначенные на графике углы считаем равными.



А. (2 балла) Рассмотрим туннельный диод, параметры которого равны $I_1 = 4I_2 = 4i$, $U_2 = 4U_1 = 4u$, при этом значения i и u считаются известными. Этот диод подключили к идеальному источнику с напряжением $U_0 = 6u$, последовательно с переменным резистором, сопротивление которого может меняться в широких пределах (см. рисунок, представленный ниже). При каких значениях сопротивления резистора значение тока в цепи определяется однозначно?



Б. (5 баллов) Параметры другого туннельного диода равны $I_1 = 1$ мА, $I_2 = 10$ мА, $U_1 = 0{,}2$ В, $U_2 = 0{,}8$ В. При помощи этого диода и балластного резистора R_0 собрали цепь по схеме, показанной на рисунке.



Известно, что ток через резистор R в этой цепи имеет одно и то же значение при любом входном напряжении из диапазона $U = 3{,}2 \pm 0{,}2$ В.

Б1) (2 балла) Найдите сопротивление балластного резистора R_0.

Б2) (3 балла) Чему может быть равно сопротивление нагрузки R? Укажите границы диапазона возможных значений $R_{\min}$ и $R_{\max}$.

▲ **Решение. Что происходит.** Диод нелинейный: его ток не пропорционален напряжению, а на среднем участке характеристики ток с ростом напряжения даже падает. Поэтому уравнение цепи удобно решать графически: ток определяется пересечением характеристики диода с прямой, которую задаёт остальная цепь («нагрузочная прямая»). Пересечений может быть одно или несколько. В части Б резистор R_0, включённый параллельно, «выпрямляет» падающий участок в горизонтальную полку — ток через блок не зависит от напряжения на нём, это стабилизатор тока. Главные законы — закон Ома и правила Кирхгофа. Класс задачи — цепи с нелинейным элементом, графический метод.

Обозначения. $V(I)$ — напряжение на диоде при токе I; ветви характеристики: *подъём* от 0 до (U_1, I_1), *спад* до (U_2, I_2) и снова *подъём*. Равные углы на графике означают, что второй подъём параллелен первому: наклон обоих $\dfrac{I_1}{U_1}$.

Часть А.

1. Нагрузочная прямая. По второму правилу Кирхгофа напряжение источника равно сумме напряжений на резисторе и диоде:

$$U_0 = IR + V(I) \quad \Rightarrow \quad I = \frac{U_0 - U}{R},$$

где U — напряжение на диоде. На графике $I(U)$ это прямая через точку $(U_0, 0) = (6u, 0)$ с наклоном $-\dfrac{1}{R}$; ток в цепи — точки её пересечения с

характеристикой (рис. 2).

2. Сколько пересечений. Будем поворачивать прямую вокруг точки $(6u, 0)$. Крутая прямая (малое R) проходит выше пика $(u, 4i)$ и пересекает только второй подъём — одно решение. Пологая прямая (большое R) проходит ниже впадины $(4u, i)$ и пересекает только первый подъём — тоже одно решение. Между ними прямая пересекает все три ветви — три решения, ток неоднозначен. Граничные прямые проходят через пик и через впадину (на них два решения, это тоже неоднозначность).

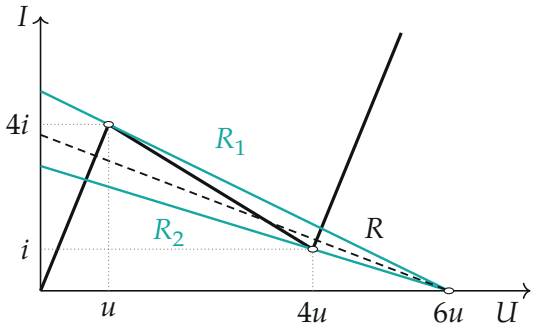


Рис. 2. Характеристика диода части A (жирная) и нагрузочные прямые: граничные R_1 (через пик) и R_2 (через впадину); пунктир — промежуточное R с тремя пересечениями.

3. Граничные сопротивления. Прямая через пик $(u, 4i)$:

$$4i = \frac{6u - u}{R_1} \quad \Rightarrow \quad R_1 = \frac{5u}{4i}.$$

Прямая через впадину $(4u, i)$:

$$i = \frac{6u - 4u}{R_2} \quad \Rightarrow \quad R_2 = \frac{2u}{i}.$$

Проверим, что при $R < R_1$ прямая не задевает спад: на всём отрезке $u \leqslant U \leqslant 4u$ прямая выше спада, потому что выше его в обоих концах ($I(u) > 4i$, $I(4u) = \dfrac{2u}{R} > \dfrac{8i}{5} > i$), а обе линии прямые. Так же при

$R > R_2$ прямая ниже спада и ниже второго подъёма. Ток однозначен при $R < \dfrac{5u}{4i}$ или $R > \dfrac{2u}{i}$.

Часть Б.

Значения параметров. На графике ток пика больше тока впадины, $I_1 > I_2$; в тексте условия значения переставлены, поэтому берём $I_1 = 10$ мА, $I_2 = 1$ мА (так и в решении организаторов).

Б1. Сопротивление R_0. Ток через R равен общему току блока «диод $\|$ R_0» (первое правило Кирхгофа для узла). Напряжение на блоке $U_б$ одно и то же у диода и у R_0, поэтому характеристика блока — сумма токов:

$$I_б(U_б) = I_д(U_б) + \frac{U_б}{R_0}.$$

Чтобы ток через R не зависел от входного напряжения, у блока должен быть горизонтальный участок. На спаде ток диода убывает со скоростью $\dfrac{I_1 - I_2}{U_2 - U_1} = \dfrac{9\text{ мА}}{0{,}6\text{ В}} = 15$ мА/В, ток через R_0 растёт со скоростью $\dfrac{1}{R_0}$. Сумма постоянна, если

$$\frac{1}{R_0} = \frac{I_1 - I_2}{U_2 - U_1} \quad \Rightarrow \quad R_0 = \frac{U_2 - U_1}{I_1 - I_2} = \frac{0{,}6\text{ В}}{9\text{ мА}} \approx 66{,}7\text{ Ом}.$$

Ток полки (рис. 3):

$$I_0 = I_1 + \frac{U_1}{R_0} = 10\text{ мА} + 3\text{ мА} = 13\text{ мА}$$

(на правом конце полки то же: $I_2 + \dfrac{U_2}{R_0} = 1 + 12 = 13$ мА). На подъёмах ток блока растёт, так что вся его характеристика неубывающая и ток в цепи определяется однозначно.

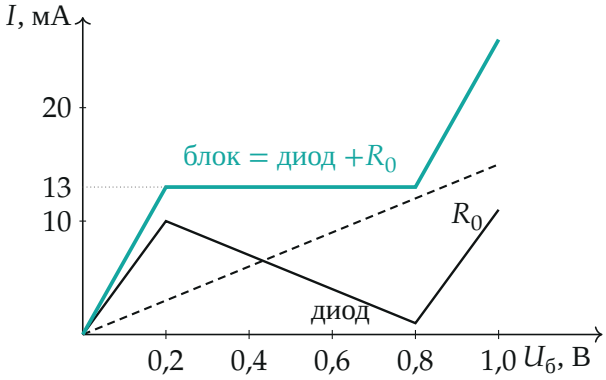


Рис. 3. Характеристики диода (чёрная), резистора $R_0 = 66{,}7$ Ом (пунктир) и их параллельного соединения (бирюзовая): между 0,2 и 0,8 В — полка 13 мА.

Б2. Сопротивление нагрузки. Ток через R равен $I_0 = 13$ мА тогда и только тогда, когда напряжение на блоке лежит на полке, $U_1 \leqslant U_б \leqslant U_2$. По второму правилу Кирхгофа $U_б = U - I_0 R$, поэтому

$$U_1 \leqslant U - I_0 R \leqslant U_2 \quad \Rightarrow \quad \frac{U - U_2}{I_0} \leqslant R \leqslant \frac{U - U_1}{I_0}.$$

Это должно выполняться при всех U от 3,0 до 3,4 В; левая граница жёстче всего при $U_{\max} = 3{,}4$ В, правая — при $U_{\min} = 3{,}0$ В:

$$U = 3{,}0 \text{ В}: \ 169 \text{ Ом} \leqslant R \leqslant 215{,}4 \text{ Ом};$$

$$U = 3{,}4 \text{ В}: \ 200 \text{ Ом} \leqslant R \leqslant 246 \text{ Ом}.$$

Общая часть (рис. 4):

$$R_{\min} = \frac{U_{\max} - U_2}{I_0} = \frac{2{,}6 \text{ В}}{13 \text{ мА}} = 200 \text{ Ом},$$

$$R_{\max} = \frac{U_{\min} - U_1}{I_0} = \frac{2{,}8 \text{ В}}{13 \text{ мА}} \approx 215 \text{ Ом}.$$

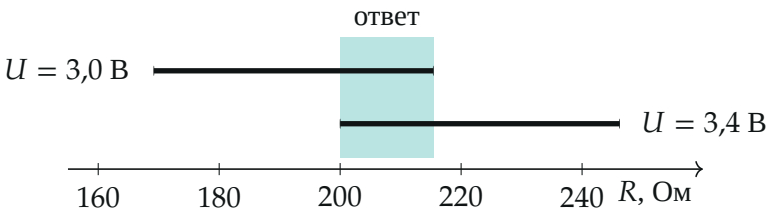


Рис. 4. Допустимые R при крайних входных напряжениях и их общая часть 200 … 215 *Ом.*

Обратите внимание. Граница $R_{\min}$ получается ровно 200 Ом: $\dfrac{2{,}6}{0{,}013} = 200{,}0$. У организаторов в ответе $R_{\min} = 201$ Ом — это неточность округления. При промежуточных U условия выполняются сами: обе границы линейны по U.

Ответ матрёшкой. А: $R < \dfrac{U_0 - U_1}{I_1}$ или $R > \dfrac{U_0 - U_2}{I_2}$. Б: $R_0 = \dfrac{U_2 - U_1}{I_1 - I_2}$, $I_0 = I_1 + \dfrac{U_1}{R_0}$, $\dfrac{U_{\max} - U_2}{I_0} \leqslant R \leqslant \dfrac{U_{\min} - U_1}{I_0}$.

Проверка. Размерности — везде отношение вольт к амперам, омы. Предельный случай А: при $R \to 0$ диод под напряжением $6u$ — на втором подъёме, одно значение; при $R \to \infty$ ток мал — на первом подъёме; оба вне найденного запрещённого интервала. Б: в точке $U_6 = U_2$ формулы полки и второго подъёма дают одно и то же 13 мА — характеристика блока непрерывна.

Ответ. А) $R < \dfrac{5u}{4i}$ или $R > \dfrac{2u}{i}$; Б1) $R_0 = \dfrac{U_2 - U_1}{I_1 - I_2} \approx 66{,}7$ Ом; Б2) 200 Ом $\leqslant R \leqslant$ 215 Ом.