В погоне за нулём

Задача 1. [МОШ 2024/25, 10 класс, задача 1] Колесо радиусом $R = 50$ см движется без проскальзывания по горизонтальной поверхности, при этом его ось движется с ускорением $a = 1$ м/с^2. Спустя какое время после начала движения колеса ускорение некоторой его точки, находящейся на расстоянии $r = 25$ см от оси, будет равно нулю?

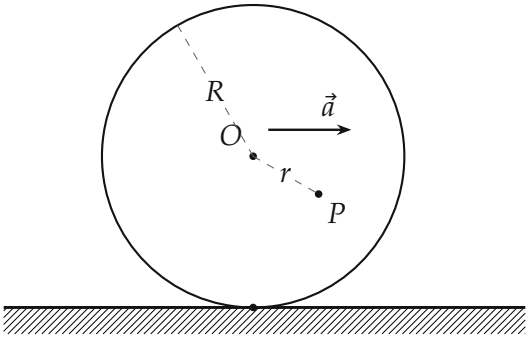

Рис. 1. Колесо катится вправо без проскальзывания, ускорение оси $\vec{a}$ направлено вдоль поверхности; P — точка на расстоянии r от оси

▲ **Решение. Что происходит.** Ускорение любой точки колеса складывается из ускорения оси $\vec{a}$ и ускорения этой же точки в системе отсчёта, связанной с осью, — там точка просто движется по окружности радиуса r. Эта система движется поступательно, не вращаясь, поэтому складываются именно ускорения, без поправок. Ускорение точки по окружности состоит из касательного (оно постоянно: колесо раскручивается равноускоренно) и нормального (оно растёт со временем вместе с угловой скоростью). Ускорение точки равно нулю, когда сумма этих двух частей по модулю равна a и направлена противоположно $\vec{a}$. Это произойдёт ровно в один момент.

Обозначения. O — ось колеса, P — точка на расстоянии r от неё, ω и ε — угловая скорость и угловое ускорение колеса, $\vec{a}_\tau$ и $\vec{a}_n$ — касательное и нормальное ускорения точки P в системе отсчёта оси.

1. Угловое ускорение колеса. Нет проскальзывания — значит, скорость точки касания в лабораторной системе равна нулю, а скорость

оси $v = \omega R$. Дифференцируем это равенство по времени: ускорение оси $a = \varepsilon R$, откуда

$$\varepsilon = \frac{a}{R}, \qquad \omega = \varepsilon t = \frac{at}{R} \quad \text{(колесо стартует из покоя)}.$$

2. Ускорение точки P в системе оси. Точка движется по окружности радиуса r с угловой скоростью ω и угловым ускорением ε:

$$a_\tau = \varepsilon r = \frac{ar}{R} = \frac{a}{2}, \qquad a_n = \omega^2 r = \left(\frac{at}{R}\right)^2 r.$$

Вектор $\vec{a}_\tau$ направлен по касательной, $\vec{a}_n$ — к оси, поэтому *они перпендикулярны*.

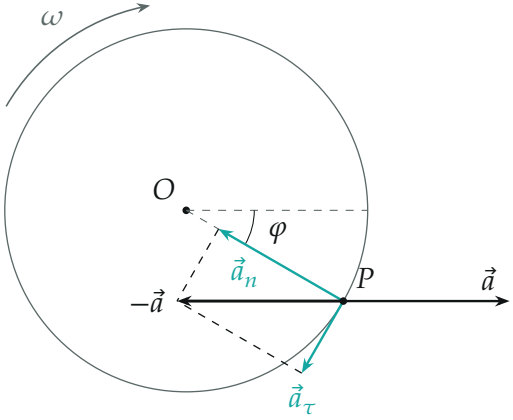

Рис. 2. Система оси в момент, когда ускорение точки P обращается в нуль: $\vec{a}_\tau + \vec{a}_n = -\vec{a}$

3. Условие нулевого ускорения. В лабораторной системе $\vec{a}_P = \vec{a} + \vec{a}_\tau + \vec{a}_n = 0$, то есть $\vec{a}_\tau + \vec{a}_n = -\vec{a}$. Складываются перпендикулярные векторы, значит, квадрат модуля суммы равен сумме квадратов (теорема Пифагора для треугольника на рис. 3):

$$a_\tau^2 + a_n^2 = a^2 \;\Rightarrow\; a_n = \sqrt{a^2 - a_\tau^2} = a\sqrt{1 - \frac{r^2}{R^2}} = \frac{\sqrt{3}}{2}a.$$

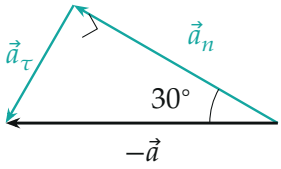

Рис. 3. Векторный треугольник: $a_\tau = a/2$, $a_n = \frac{\sqrt{3}}{2}a$, угол $30°$, $\sin 30° = r/R$

4. Время. Подставляем $a_n = \omega^2 r$ из пункта 2:

$$\left(\frac{at}{R}\right)^2 r = a\sqrt{1-\frac{r^2}{R^2}} \;\Rightarrow\; t = \sqrt{\frac{R\sqrt{R^2-r^2}}{a\,r}} = \sqrt{\frac{0{,}5\cdot 0{,}433}{1\cdot 0{,}25}}\ \text{с} \approx 0{,}93\ \text{с}.$$

Где эта точка. Угол φ между радиусом OP и горизонталью равен углу между $\vec{a}_n$ и $-\vec{a}$ на рис. 3, поэтому $\sin\varphi = a_\tau/a = r/R = 1/2$, $\varphi = 30°$. Из направлений векторов на рис. 2 следует, что точка лежит ниже оси и впереди неё (в сторону движения): $\vec{a}_\tau$ направлено по вращению (по часовой стрелке), $\vec{a}_n$ — к оси, и только для такой точки сумма смотрит назад.

Обратите внимание. Нуль ускорения возможен только у точек с $r < R$: касательное ускорение $a_\tau = ar/R$ не может превышать a. У точки на ободе ($r = R$) оно равно a ровно в начальный момент $t = 0$ — это точка касания, неподвижная и безускоренная.

Проверка. Размерность: $\sqrt{\text{м}\cdot\text{м}/(\text{м/с}^2\cdot\text{м})} = \text{с}$. Предел $r \to R$ даёт $t \to 0$ — точка касания в начале движения, как и должно быть; предел $r \to 0$ даёт $t \to \infty$ — сама ось всегда ускоряется. Числа: $a_n = (at/R)^2 r = (1{,}86)^2\cdot 0{,}25 \approx 0{,}87\ \text{м/с}^2 = \frac{\sqrt{3}}{2}a$.

Ответ. $t = \sqrt{\dfrac{R\sqrt{R^2-r^2}}{a\,r}} \approx 0{,}93$ с; в этот момент точка лежит на радиусе, наклонённом на $30°$ вниз от горизонтали, впереди оси.