F-ускорение

Задача 2. [МОШ 2024/25, 10 класс, задача 2] F-образную трубку целиком заполнили ртутью, как показано на рисунке. Длина каждого колена трубки равна $L = \dfrac{p_0}{3\rho g}$, где p_0 — атмосферное давление, ρ — плотность ртути, g — ускорение свободного падения. Трубку начинают двигать горизонтально с плавно возрастающим ускорением a (см. рисунок). Площадь сечения трубки S мала ($\sqrt{S} \ll L$). Давлением паров ртути можно пренебречь.

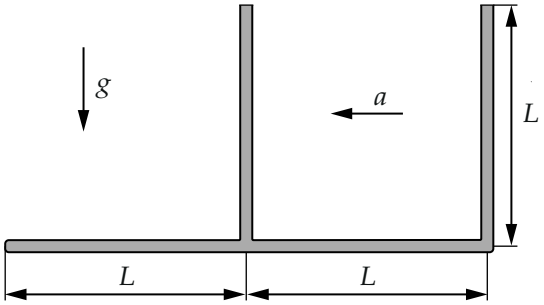

Рис. 1

1) Определите объём вылившейся из трубки ртути, когда ускорение станет равным g. Чему равно давление ртути на левом конце горизонтальной части трубки в этот момент времени?
2) Рассчитайте суммарный объём воздуха в трубке при ускорении, равном $3g$. Приведите схематический рисунок распределения ртути в трубке.
3) Ответьте на вопросы пункта б) для случая $a = 4g$.

▲ **Решение. Что происходит.** Удобно смотреть из системы отсчёта трубки. В ней на ртуть действуют сила тяжести (вниз) и сила инерции (вправо, против ускорения трубки), так что давление в связной ртути растёт вниз на ρg на единицу длины, а вдоль горизонтали вправо — на ρa на единицу длины. На свободной поверхности у открытого конца колена давление равно p_0. С ростом a ртуть сдвигается вправо и переливается

через верх правого колена; потом горизонтальный столб рвётся: в нём появляются воздух и вакуум. Ускорение растёт плавно, поэтому ртуть в каждый момент находится в равновесии в системе трубки.

Обозначения. x — расстояние по горизонтали от левого закрытого конца; среднее колено стоит при $x = L$, правое — при $x = 2L$. h — высота ртути в среднем колене, $p_0 = 3\rho g L$ (из условия $L = p_0/(3\rho g)$).

Закон давления. Элемент ртути длиной dx в горизонтальной части ускоряется влево с ускорением a (система отсчёта — земля). Второй закон Ньютона в проекции на горизонталь: $(p(x+dx) - p(x))S = \rho S\, dx \cdot a$, то есть $dp/dx = \rho a$: давление растёт вправо. В вертикальном колене на глубине h под свободной поверхностью оно равно $p_0 + \rho g h$.

Пункт 1.

1. Правое колено полное. Пусть горизонтальная ртуть сплошная, а давление в основании среднего колена равно $p_0 + \rho g h$. Тогда в углу давление было бы $p_0 + \rho g h + \rho a L$. Правое колено длиной L держит в основании не больше $p_0 + \rho g L$, поэтому ртуть переливается через его верх: правое колено остаётся доверху полным, а убыль берётся из среднего колена.

2. Уровень в среднем колене. Давление в углу двумя способами: $p_0 + \rho g L = p_0 + \rho g h + \rho a L$, откуда $h = L\left(1 - \dfrac{a}{g}\right)$. Объём, ушедший из среднего колена, и есть вылившийся. При $a = g$ получаем $h = 0$: среднее колено опустело, вылилось

$$V_1 = S(L - h) = SL.$$

3. Давление на левом конце. При $a = g$ над разветвлением воздух, давление там p_0. Левее давление падает на ρa на единицу длины, на отрезке L — на $\rho g L$:

$$p = p_0 - \rho g L = 3\rho g L - \rho g L = 2\rho g L = \tfrac{2}{3} p_0.$$

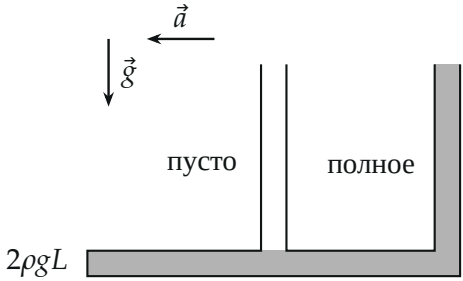

Рис. 2. $a = g$: среднее колено пусто, правое полное; слева давление $2\rho gL$

Пункт 2. $a = 3g$**.**

Для $a > g$ среднее колено уже пусто, давление на уровне его основания равно p_0 — воздух открыт в атмосферу.

4. Левая часть. Слева от разветвления столбик ртути длиной L: давление у левой стенки $p_0 - \rho aL = \rho gL\,(3 - a/g)$. Пока $a < 3g$, оно положительно, ртуть прижата к стенке; при $a = 3g$ равно нулю — это предел.

5. Правая часть рвётся. Сплошной столб длиной L справа от разветвления дал бы в углу $p_0 + \rho aL > p_0 + \rho gL$, а правое колено больше $p_0 + \rho gL$ не держит. Поэтому через разветвление входит воздух, столб рвётся, и у угла остаётся кусок длиной ℓ с давлением на его левом краю p_0 (воздух) и $p_0 + \rho gL$ в углу (колено полное): $\rho a\ell = \rho gL$, откуда $\ell = \dfrac{gL}{a} = \dfrac{L}{3}$.

6. Воздух. Он занимает среднее колено (SL) и промежуток в горизонтальной части между левым столбиком и правым куском: $S\,(L - \ell) = \frac{2}{3}SL$. Итого

$$V_{\text{в}} = SL + \tfrac{2}{3}SL = \tfrac{5}{3}\,SL.$$

Ртуть: $L + \frac{1}{3}L + L = \frac{7}{3}L$ (в единицах S), вместе с воздухом $4SL$ — объём трубки.

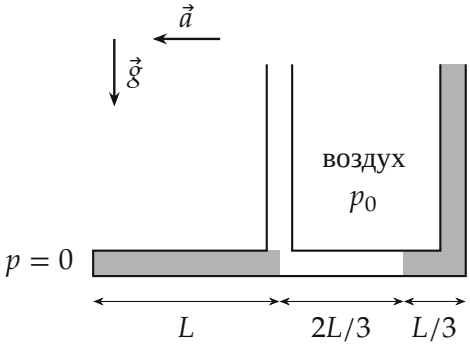

Рис. 3. $a = 3g$: серым — ртуть; слева столбик L, посередине воздух, у угла кусок $L/3$ и полное правое колено

Пункт 3. $a = 4g$**.**

7. Левый столбик отрывается. Прижатым к стенке столбик был бы при давлении у стенки $p_0 - \rho aL < 0$ (при $4g$ это $-\rho gL$). Давление ртути не может быть отрицательным (пары не учитываем), поэтому столбик отходит от стенки, оставляя вакуум. Длина столбика — по-прежнему L (сечение постоянно). Он сдвигается вправо на s и закрывает собой разветвление, а давление в нём растёт от нуля у левого края на ρa на единицу длины.

8. Сдвиг s**.** Под пустым средним коленом давление ртути равно p_0, а расстояние от левого края столбика до этого места $L - s$: $\rho a\,(L - s) = p_0$, откуда $L - s = \dfrac{3gL}{a} = \dfrac{3}{4}L$ и $s = \dfrac{L}{4}$. На правом краю столбика давление $\rho aL = 4\rho gL = \frac{4}{3}p_0$ — таково давление запертого воздуха между столбиком и правым коленом (разветвление закрыто ртутью).

9. Угол. Правое колено полное, в углу давление не больше $p_0 + \rho gL = 4\rho gL$ — ровно то, что даёт запертый воздух. Значит, никакой добавки $\rho a\ell$ от ртути в горизонтальной части справа быть не может: $\ell = L\left(\dfrac{4g}{a} - 1\right) = 0$. Воздух подходит к самому углу.

10. Объёмы. Ртуть: столбик SL и правое колено SL, всего $2SL$. Вакуум: $S\,s = \frac{1}{4}SL$. Воздух:

$$V_{\text{в}} = 4SL - 2SL - \tfrac{1}{4}SL = \tfrac{7}{4}\,SL,$$

это среднее колено SL и запертый воздух от $x = \frac{5}{4}L$ до угла: $\frac{3}{4}SL$.

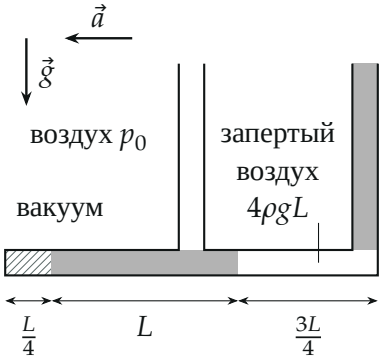

Рис. 4. $a = 4g$: слева вакуум, столбик сдвинулся на $L/4$ и закрыл среднее колено, воздух подходит к углу

Обратите внимание. Запертый воздух нельзя считать замкнутой порцией. Если применить к нему закон Бойля–Мариотта от состояния при $3g$ (длина $\frac{2}{3}L$ при p_0), при давлении $\frac{4}{3}p_0$ получится зазор $\frac{1}{2}L$, а ртуть справа — кусок длиной $\frac{1}{4}L$. Но такой кусок создал бы в углу $5\rho gL > p_0 + \rho gL$, и правое колено его не удержит. Два подхода к сдвигу столбика противоречат друг другу: сплошной столбик ртути справа не существует, он дробится на капли, между которыми проходит воздух, и состояние определяется давлением в углу.

Проверка. Размерность: ρgL — давление, SL — объём; сумма объёмов ртути, воздуха и вакуума в каждом пункте равна $4SL$. Соседние режимы стыкуются: при $a = g$ формулы пунктов 1 и 2 дают одно и то же (пустое колено, $\ell = L$, давление $2\rho gL$); при $a = 3g$ давление у стенки обращается в нуль, там и начинается отрыв; при $a = 4g$ давление запертого воздуха со стороны левого столбика (ρaL) и допустимое в углу ($p_0 + \rho gL$) оба равны $4\rho gL$ — поэтому $\ell = 0$ получилось само, а не подогнано. Для $g \le a \le 4g$ воздуха $SL(2 - g/a)$: это 1, $\frac{5}{3}$, $\frac{7}{4}$ в SL при $a = g,\ 3g,\ 4g$. Смысл: эффективная тяжесть гонит ртуть в правый угол, и чем больше a, тем больше трубки занимает воздух.

Ответ. 1) $V_1 = SL$, $p = 2\rho gL = \frac{2}{3}p_0$; 2) $V_в = \frac{5}{3}SL$; 3) $V_в = \frac{7}{4}SL$.