Оболочка на весах

Задача 3. [МОШ 2024/25, 10 класс, задача 3] Оболочку с тонкими и плохо проводящими тепло стенками из нерастяжимого гибкого полиэтилена взвесили, когда в ней не было воздуха, получилось значение массы $M = 5$ г. Затем с помощью насоса через трубку с небольшим сечением $S = 0{,}2$ см^2 за весьма короткое время $\tau = 5$ с оболочку заполнили до объёма $V = 10$ литров воздухом, который брался снаружи, и сразу же взвесили получившийся мешок с воздухом на тех же весах. Получили значение $0{,}95M$. Через большое время, когда установилось тепловое равновесие, результат взвешивания для оболочки с воздухом снова оказался M. Давление воздуха внутри оболочки и вне её всегда равно $p_0 = 10^5$ Па. Найдите температуру T_0 окружающего воздуха.

▲ **Решение. Что происходит.** Воздух вгоняют в оболочку тонкой быстрой струёй. Струя тормозится внутри, и её кинетическая энергия превращается во внутреннюю: воздух в оболочке сразу после накачки теплее наружного, поэтому менее плотный. Весы показывают вес оболочки с воздухом минус силу Архимеда от вытесненного воздуха, и по недогрузу находится разность плотностей. Разность температур даёт закон сохранения энергии. Два уравнения — два неизвестных: T_0 и T_1.

Обозначения. T_0, ρ_0 — температура и плотность наружного воздуха; T_1, ρ_1 — в оболочке сразу после накачки; $\mu = 29$ г/моль — молярная масса воздуха, m — масса воздуха, закачанного за время τ, u — скорость воздуха в трубке.

1. Что показывают весы. На оболочку с воздухом действуют вес $(M + m)g$ вниз и сила Архимеда $\rho_0 V g$ вверх (вытеснен объём V наружного воздуха), поэтому показание в единицах массы

$$M_{\text{показ}} = M + m - \rho_0 V = M + (\rho_1 - \rho_0)V, \qquad m = \rho_1 V.$$

Когда температуры выровнялись, $\rho_1 = \rho_0$ и показание равно M — как в условии. Сразу после накачки оно $0{,}95M$, откуда

$$\rho_0 - \rho_1 = \frac{0{,}05\,M}{V} = \frac{0{,}05 \cdot 5 \cdot 10^{-3}\ \text{кг}}{10^{-2}\ \text{м}^3} = 0{,}025\ \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}.$$

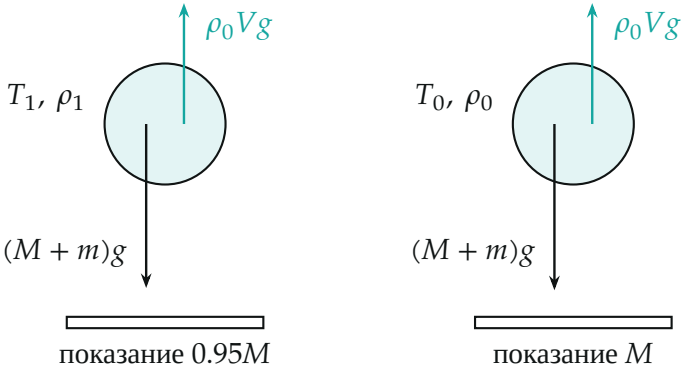

Рис. 1. Силы на оболочку с воздухом (в масштабе 0,12 см на грамм): слева сразу после накачки ($m = 13{,}1$ г), справа после выравнивания температур ($m = 13{,}35$ г); разность стрелок и есть показание весов

2. Плотности и температуры. Давление внутри и снаружи p_0, поэтому по уравнению Менделеева — Клапейрона $\rho = \dfrac{p_0\mu}{RT}$:

$$\rho_0 - \rho_1 = \frac{p_0\mu}{R}\left(\frac{1}{T_0} - \frac{1}{T_1}\right) = \frac{p_0\mu}{R}\,\frac{T_1 - T_0}{T_0 T_1}. \qquad (1)$$

3. Скорость струи. За время τ через сечение трубки S прошёл воздух объёмом $Su\tau$, и он занял в оболочке объём V. Плотность воздуха при этом меняется лишь на $\approx 2\,\%$ (см. ниже), поэтому

$$u = \frac{V}{S\tau} = \frac{10^{-2}\ \text{м}^3}{0{,}2\cdot 10^{-4}\ \text{м}^2\cdot 5\ \text{с}} = 100\ \text{м/с}.$$

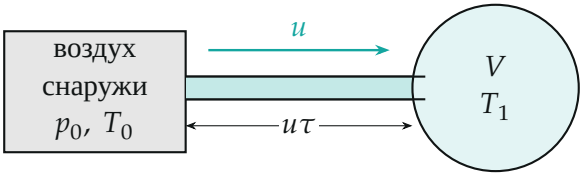

Рис. 2. Воздух объёмом $Su\tau$ из трубки собирается в оболочке объёма V и нагревается

4. Закон сохранения энергии. Возьмём всю закачанную порцию воздуха: $\nu = m/\mu$ молей. Стенки тонкие и плохо проводят тепло, накачка быстрая — теплообмена нет. Начало: воздух снаружи (p_0, T_0, объём $V_0 = \nu R T_0/p_0$), его внутренняя энергия $\frac{5}{2}\nu R T_0$ (двухатомный газ). Насос сообщает ему упорядоченное движение в трубке, энергия $mu^2/2$; при торможении в оболочке она переходит в тепловую. Конец: внутри оболочки, температура T_1, объём $V = \nu R T_1/p_0$, внутренняя энергия $\frac{5}{2}\nu R T_1$; газ вытеснил атмосферу, работа против внешнего давления $p_0(V - V_0) = \nu R(T_1 - T_0)$. Энергия сохраняется:

$$\tfrac{5}{2}\nu R T_0 + \tfrac{1}{2}mu^2 = \tfrac{5}{2}\nu R T_1 + \nu R(T_1 - T_0) \;\Rightarrow\; \Delta T \equiv T_1 - T_0 = \frac{\mu u^2}{7R},$$

$$\Delta T = \frac{0{,}029 \cdot 100^2}{7 \cdot 8{,}31}\ \text{К} \approx 5{,}0\ \text{К}.$$

5. Сборка. Подставляем $T_1 = T_0 + \Delta T$ в (1) и в левую часть $0{,}025$ кг/м$^3 = 0{,}05M/V$:

$$T_0(T_0 + \Delta T) = \frac{p_0 \mu V}{R \cdot 0{,}05\,M}\Delta T \approx 6{,}96 \cdot 10^4\ \text{К}^2,$$

$$T_0 = -\frac{\Delta T}{2} + \sqrt{\frac{\Delta T^2}{4} + 6{,}96 \cdot 10^4}\ \text{К} \approx 261\ \text{К}.$$

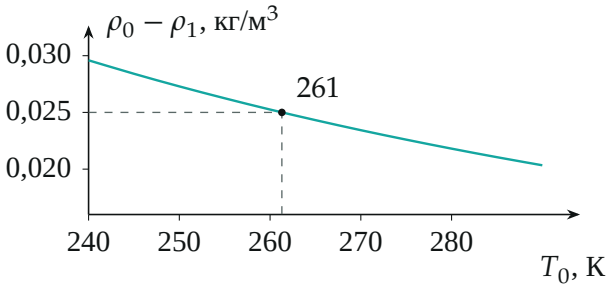

Рис. 3. Разность плотностей как функция T_0 при $\Delta T = 5$ К; значение $0{,}025$ достигается при $T_0 \approx 261$ К

Находим $T_1 = T_0 + \Delta T \approx 266$ K; воздух в оболочке сразу после накачки на 5 K теплее наружного.

Обратите внимание. Нагрев — не от сжатия и не от теплообмена: воздух входит под тем же давлением p_0, а нагревает его торможение струи. Поэтому в уравнении энергии стоит кинетическая энергия струи, а не работа сжатия.

Проверка. Размерность: μu^2 — Дж/моль, R — Дж/(моль·K), отношение — K. Подстановка: при $T_0 = 261{,}3$ K и $T_1 = 266{,}3$ K получаем $\rho_0 = 1{,}335$ и $\rho_1 = 1{,}310$ кг/м^3, разность 0,025 — как в условии; масса воздуха $m = 13{,}1$ г. Скорость 100 м/с ниже скорости звука, струю можно считать несжимаемой, а $\Delta T \ll T_0$ оправдывает $\rho_1 \approx \rho_0$ в п. 3. Модель струи грубая: плотность воздуха в трубке мы приняли равной плотности в оболочке; ответ чувствителен к u (2 % по u дают ≈ 5 K по T_0), поэтому осмысленная точность — порядка ± 1 K при заданных в условии округлениях.

Ответ. $T_0 \approx 261$ K ($\approx -12\,^\circ$C).