Треугольник-звезда

Задача 4. [МОШ 2024/25, 10 класс, задача 4] Известно, что любая схема, с тремя выводными контактами, состоящая из идеальных источников напряжения и резисторов, может быть представлена в виде звезды или треугольника, в ветвях которых стоят идеальные источники питания и сопротивления.

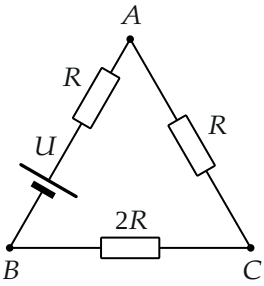

Рис. 1

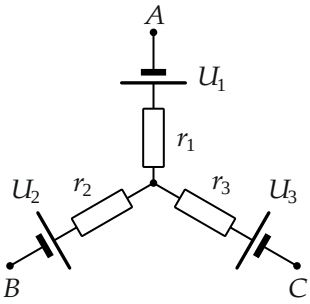

Рис. 2

Пусть в схеме на рис. 1 известны сопротивления и напряжение источника. Проведите эквивалентную замену схемы, изображённой на рис. 1, схемой, изображённой на рис. 2. Для этого рассчитайте, чему могут быть равны сопротивления резисторов и напряжения источников питания в эквивалентной цепи. Укажите, будет ли такое решение единственным? Свой ответ обоснуйте.

▲ **Решение.** **Что происходит.** Внешняя цепь «видит» схему с тремя выводами только через то, как токи в выводах зависят от потенциалов выводов. Для линейной цепи эта зависимость — набор проводимостей плюс постоянные добавки от источников. Значит, две схемы эквивалентны, если совпадают (а) сопротивления между каждой парой выводов при выключенных источниках и (б) напряжения между выводами при разомкнутых выводах (токи выводов равны нулю). Пункт (а) даёт сопротивления r_k, пункт (б) — напряжения U_k.

Обозначения. $\varphi_A, \varphi_B, \varphi_C$ — потенциалы выводов; r_1, r_2, r_3 — сопротивления звезды у выводов A, B, C; U_1, U_2, U_3 — напряжения её источников, плюс каждого направлен к центру звезды, как на рис. 2. В треугольнике плюс источника U направлен к выводу A.

1. Сопротивления. Выключенный идеальный источник — перемычка (сопротивление нуль), а не разрыв. Между B и C в треугольнике параллельны $2R$ и $R+R=2R$: $R_{BC}=R$. Между A и B параллельны R и $R+2R=3R$: $R_{AB}=\dfrac{R\cdot 3R}{4R}=\dfrac{3}{4}R$; так же $R_{AC}=\dfrac{3}{4}R$. У звезды между двумя выводами включены два её луча последовательно:

$$r_1+r_2=\tfrac{3}{4}R,\qquad r_1+r_3=\tfrac{3}{4}R,\qquad r_2+r_3=R$$

$$\Rightarrow\quad r_1=\frac{R}{4},\qquad r_2=r_3=\frac{R}{2}.$$

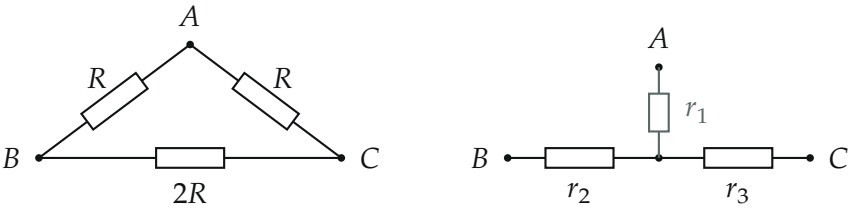

Рис. 3. Сопротивление между B и C (источники выключены): слева $2R \parallel (R+R)=R$, справа $r_2+r_3=R$; вывод A свободен, ток r_1 не идёт

2. Напряжения холостого хода в треугольнике. Токов в выводах нет, ток i течёт только по замкнутому контуру $B\to A\to C\to B$ с сопротивлением $R+R+2R=4R$ под действием U: $i=\dfrac{U}{4R}$. Положим $\varphi_B=0$. После источника потенциал U, после резистора R на ветви BA: $\varphi_A=U-iR=\frac{3}{4}U$; дальше $\varphi_C=\varphi_A-iR=\frac{1}{2}U$, и на резисторе $2R$ потенциал падает ровно до 0 — контур замкнулся верно. Итак

$$\varphi_A-\varphi_B=\tfrac{3}{4}U,\qquad \varphi_A-\varphi_C=\tfrac{1}{4}U,\qquad \varphi_C-\varphi_B=\tfrac{1}{2}U.$$

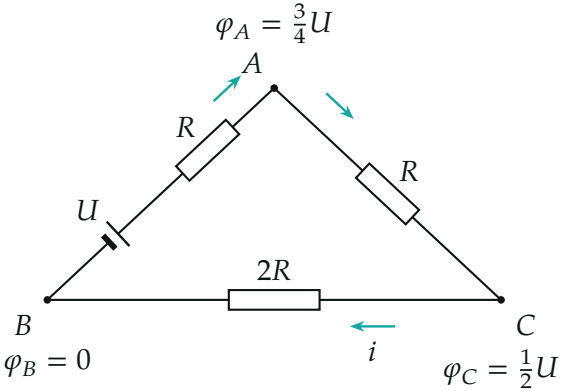

Рис. 4. Треугольник с разомкнутыми выводами: по контуру течёт ток $i = U/(4R)$, потенциалы выводов при $\varphi_B = 0$

3. Напряжения источников звезды. Без токов на резисторах звезды падений нет, и потенциал вывода на U_k ниже потенциала центра O: $\varphi_k = \varphi_O - U_k$. Приравниваем разности потенциалов выводов к найденным:

$$\varphi_A - \varphi_B = U_2 - U_1 = \tfrac{3}{4}U \quad \Rightarrow \; U_2 = U_1 + \tfrac{3}{4}U,$$
$$\varphi_A - \varphi_C = U_3 - U_1 = \tfrac{1}{4}U \quad \Rightarrow \; U_3 = U_1 + \tfrac{1}{4}U.$$

Разность $\varphi_C - \varphi_B = U_2 - U_3 = \frac{1}{2}U$ получается сама.

4. Единственность. Сопротивления определились однозначно, а напряжение U_1 осталось произвольным: прибавим ко всем трём источникам одно и то же число ε — потенциал центра звезды сдвинется на ε, а выводы, токи и всё, что снаружи, не изменятся (центр звезды снаружи недоступен). Поэтому решение *не единственно*: $U_1 = \varepsilon$, $U_2 = \varepsilon + \frac{3}{4}U$, $U_3 = \varepsilon + \frac{1}{4}U$ для любого ε. Самый простой набор: $U_1 = 0$ (в ветви A источника нет), $U_2 = \frac{3}{4}U$, $U_3 = \frac{1}{4}U$.

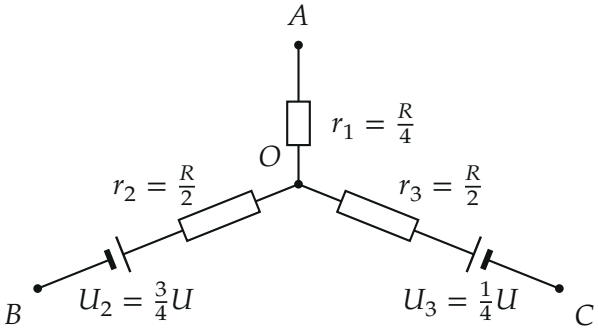

Рис. 5. Эквивалентная звезда при $U_1 = 0$; плюс каждого источника — к центру O

Обратите внимание. Выключая идеальный источник при подсчёте сопротивлений, его заменяют проводом, а не убирают из ветви: иначе ветвь AB оборвётся, и сопротивления выйдут другими.

Проверка. Второй способ: соединим B и C проводом ($\varphi_B = \varphi_C = 0$), вывод A оставим свободным. В треугольнике $I_A = 0$ даёт $(\varphi_A - U)/R + \varphi_A/R = 0$, то есть $\varphi_A = U/2$. В звезде при $I_A = 0$ потенциал φ_A равен потенциалу центра, а токи лучей B и C в узле O дают

$$\frac{2}{R}\left(\frac{3}{4}U - \varphi_O\right) + \frac{2}{R}\left(\frac{1}{4}U - \varphi_O\right) = 0 \;\Rightarrow\; \varphi_O = \frac{U}{2}$$

— то же. Дополнительно токи выводов в обеих схемах совпали при случайных потенциалах (численно). Смысл: снаружи видна только пара «сопротивления + напряжения холостого хода», а центр звезды скрыт.

Ответ. $r_1 = \dfrac{R}{4}, r_2 = r_3 = \dfrac{R}{2}; U_2 = U_1 + \dfrac{3}{4}U, U_3 = U_1 + \dfrac{1}{4}U$ при любом U_1 (например, $U_1 = 0$, $U_2 = \dfrac{3}{4}U$, $U_3 = \dfrac{1}{4}U$); решение не единственно.