Рефрактометр

Задача 5. [МОШ 2024/25, 10 класс, задача 5] Рефрактометрия — один из наиболее удобных способов определения концентрации примесей в жидкости путём измерения её показателя преломления.

Простейший рефрактометр представляет собой тубус (см. рисунок, представленный выше), на одном конце которого расположена призма с полированной скошенной гранью. На эту грань наносится капля исследуемой жидкости, которая затем прижимается к поверхности рассеивателем. Рассеиватель обеспечивает освещение жидкости под всеми углами. На другом конце тубуса находится окуляр. При наблюдении через окуляр при направлении яркого света на рассеиватель, видна шкала, часть которой освещена, а часть — нет. Граница между освещённой и неосвещённой областями определяет показатель преломления жидкости, однозначно связанный с концентрацией примесей.



Принципиальная оптическая схема рефрактометра показана на рисунке, представленном ниже.

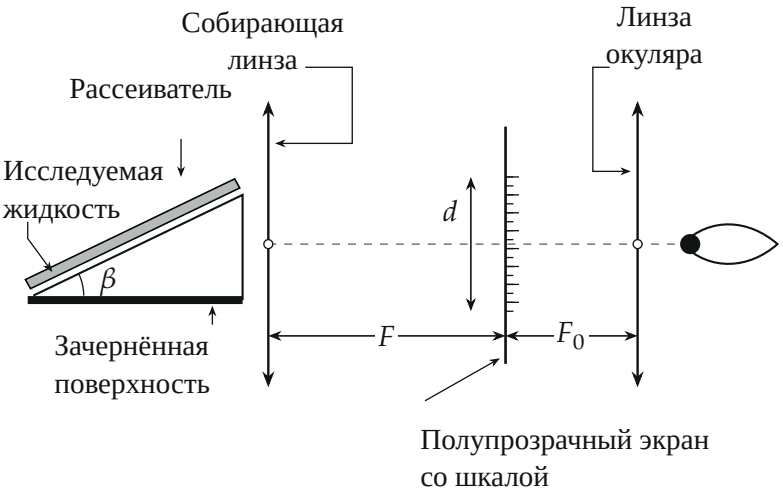

Рис. 1. Схема рефрактометра

Предположим, что необходимо спроектировать рефрактометр для измерения объёмной концентрации спирта в воде с пределом измерения 60%. Призма рефрактометра изготовлена из стекла с показателем преломления $n = 1{,}500$.

1) Какова величина угла β при вершине призмы, если при помещении на скошенную грань призмы 30%-ного раствора спирта с показателем преломления $n_{30} = 1{,}350$ граница освещённой области на экране пересекается с оптической осью линзы?
2) Рассчитайте длину шкалы d (см. рисунок) на полупрозрачном экране. Фокусное расстояние линзы $F = 10$ см. Показатель преломления чистой воды $n = 1{,}333$, 60%-ного раствора спирта — $n_{60} = 1{,}362$.
3) Шкала рефрактометра должна иметь цену деления 1%. Будем считать, что человеческому глазу комфортно различать предметы на далёком расстоянии, если угловое расстояние между ними не менее $\varphi = 15'$ (15 угловых минут). Рассчитайте максимально возможное фокусное расстояние окуляра $F_{\max}$.

▲ **Решение. Что происходит.** Рассеиватель посылает в жидкость свет под всеми углами падения от 0 до 90°. Из жидкости (показатель $n_{\text{ж}} < n$)

в стекло свет проходит, но под углом к нормали не больше предельного θ_c: самый наклонный луч — тот, что скользит вдоль грани. Этот предельный луч задаёт границу света и тени: после выхода из призмы и линзы он попадает в точку экрана, положение которой зависит от $n_ж$. Для пункта 1 главное — условие «граница на оси»: оно означает, что предельный луч идёт в стекле вдоль оси.

Обозначения. $n = 1{,}500$ — стекло, $n_ж$ — жидкость; θ_c — предельный угол преломления в стекле (от нормали к скошенной грани); α — угол предельного луча в стекле к оси (вверх от оси — плюс), α' — тот же луч после выхода в воздух; y — положение границы на экране от оси, вверх — плюс.

Пункт 1.

1. Предельный луч. Для луча из жидкости в стекло закон преломления $n_ж \sin i = n \sin\theta$. Наибольший угол падения $i = 90°$ (скользящий луч), поэтому в стекле

$$\sin\theta_c = \frac{n_ж}{n}.$$

Внутри стекла лучей с большим углом к нормали нет — это и создаёт границу.

2. Условие на ось. Лучи, идущие после призмы параллельно оси, линза собирает в точку на оси. Выходная грань призмы вертикальна, ось горизонтальна, поэтому горизонтальный в стекле луч падает на выходную грань по нормали и не преломляется. Значит, предельный луч для 30%-ного раствора горизонтален. Он составляет угол θ_c с нормалью к скошенной грани, а сама нормаль перпендикулярна грани, наклонённой на β к горизонту (рис. 2):

$$\beta + \theta_c = 90°.$$

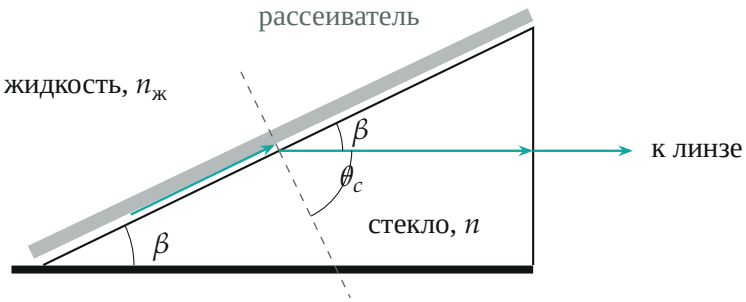

Рис. 2. Предельный луч: скользит вдоль грани в жидкости, в стекле идёт под углом θ_c к нормали и горизонтален

3. Угол призмы.

$$\sin\theta_c = \frac{n_{30}}{n} = \frac{1{,}350}{1{,}500} = 0{,}900, \quad \theta_c = 64{,}16^\circ, \qquad \beta = 90^\circ - \theta_c \approx 25{,}8^\circ.$$

Пункт 2.

4. Предельный луч для любой жидкости. Нормаль к грани направлена вниз под углом $90^\circ - \beta = \theta_{30} = 64{,}16^\circ$ к горизонту, предельный луч отклонён от неё на $\theta_c(n_ж)$:

$$\alpha = \theta_c(n_ж) - \theta_{30}.$$

При $n_ж = n_{30}$ получаем $\alpha = 0$ — согласовано с пунктом 1. Остальные лучи в стекле идут под меньшими α (то есть ниже), поэтому освещена нижняя часть экрана.

5. Выход из призмы. Нормаль к вертикальной выходной грани горизонтальна, закон Снеллиуса для выхода в воздух: $\sin\alpha' = n\sin\alpha$.

6. Точка на экране. Параллельный пучок под углом α' к оси линза собирает в точку фокальной плоскости, где стоит экран; луч через центр линзы не преломляется, поэтому $y = F\,\mathrm{tg}\,\alpha'$ (рис. 3). Длина шкалы $d = y_{60} - y_0 = F(\mathrm{tg}\,\alpha'_{60} - \mathrm{tg}\,\alpha'_0)$, где индекс 0 — чистая вода.

$n_ж$	θ_c	α	α'	y, мм
1,333 (0%)	62,71°	−1,45°	−2,18°	−3,80
1,350 (30%)	64,16°	0	0	0
1,362 (60%)	65,23°	1,07°	1,61°	2,81

$$d = 2{,}81 + 3{,}80 \text{ мм} \approx 6{,}6 \text{ мм}.$$

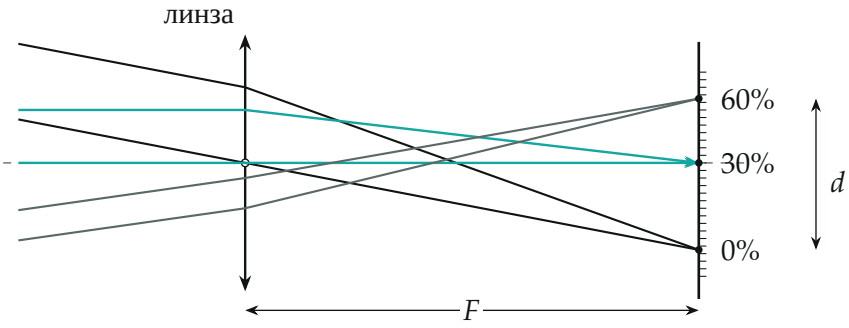

Рис. 3. Пучки с границ шкалы (углы на рисунке увеличены в пять раз): параллельные лучи собираются в одну точку экрана

Пункт 3.

7. Цена деления. Шкала проградуирована на 60% длиной d; считаем её равномерной (даны только показатели на концах и в середине, зависимость n от концентрации примем линейной). Одно деление: $\delta = \dfrac{d}{60} = \dfrac{6{,}6 \text{ мм}}{60} = 0{,}11$ мм.

8. Угол между делениями в окуляре. Экран стоит в фокальной плоскости окуляра, поэтому лучи от двух соседних делений выходят из окуляра двумя параллельными пучками, и угол между пучками $\psi = \delta/F_0$ (малый угол, рис. 4). Глаз различает деления, если $\psi \geq \varphi$, то есть $F_0 \leq \delta/\varphi$.

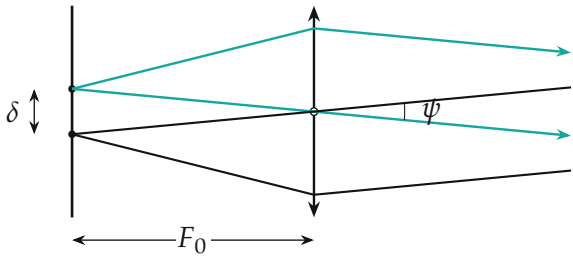

Рис. 4. Соседние деления шкалы в фокальной плоскости окуляра: после окуляра два параллельных пучка под углом $\psi = \delta/F_0$ (угол увеличен)

Наибольшее допустимое фокусное расстояние окуляра

$$F_{\max} = \frac{\delta}{\varphi} = \frac{0{,}11\text{ мм}}{15'} = \frac{0{,}11\text{ мм}}{4{,}36\cdot 10^{-3}} \approx 25{,}2\text{ мм}, \quad 15' = 4{,}36\cdot 10^{-3}\text{ рад}.$$

Обратите внимание. В стекле предельный угол считают от нормали к грани по $\sin\theta_c = n_{\text{ж}}/n$, а не $n/n_{\text{ж}}$: свет идёт из оптически менее плотной жидкости в стекло, полного отражения здесь нет, предельный угол возникает из-за того, что падение из жидкости не бывает круче 90°.

Проверка. Размерность: $F\,\mathrm{tg}\,\alpha'$ — длина; δ/F_0 — безразмерный угол в радианах. Второй способ для d: при малых углах $\Delta\alpha \approx \Delta n_{\text{ж}}/(n\cos\theta_{30}) = 0{,}029/(1{,}5\cdot 0{,}436) = 0{,}0443$ рад, $\Delta\alpha' \approx n\,\Delta\alpha = 0{,}0665$ рад, $d \approx F\,\Delta\alpha' = 6{,}6$ мм — совпадает. Точная формула даёт $F_{\max} = 25{,}25$ мм (по округлённому $d = 6{,}6$ мм — 25,2 мм). Смысл: чем длиннее фокус окуляра, тем мельче деления выглядят для глаза, поэтому окуляру нужен короткий фокус.

Ответ. 1) $\beta = 25{,}8°$; 2) $d \approx 6{,}6$ мм; 3) $F_{\max} \approx 25{,}2$ мм.