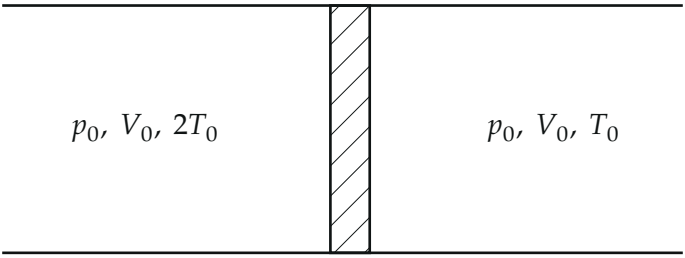
Установление равновесия

Задача 1. [МОШ 2024/25, 11 класс, задача 1] В теплоизолированном цилиндре, расположенном горизонтально, лёгкий, хорошо проводящий тепло поршень делит объём на две равные части, каждая объёмом V_0. В обеих частях находится один и тот же одноатомный идеальный газ при начальном давлении p_0 и температурах $2T_0$ и T_0 (см. рисунок). Теплоёмкостью поршня можно пренебречь.



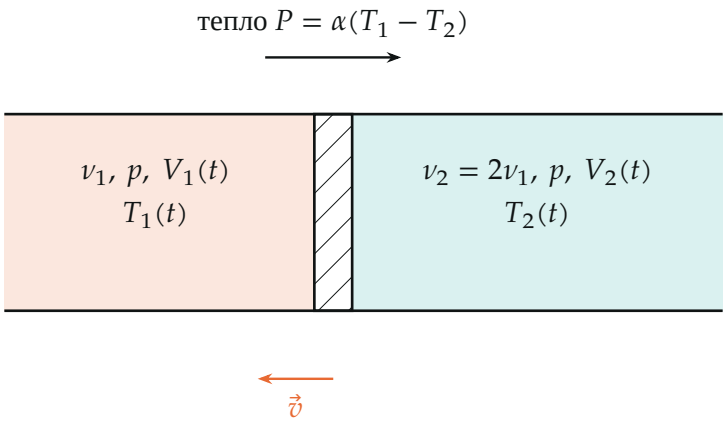
Мощность теплообмена между частями цилиндра пропорциональна разности температур: $P = \alpha(T_1 - T_2)$, где α — коэффициент теплопередачи, T_1 — температура в левой части, T_2 — в правой. В процессе установления равновесия поршень медленно перемещается без трения о стенки цилиндра.

1. Найдите конечную температуру содержимого цилиндра.
2. Найдите время, в течение которого разность температур между частями цилиндра уменьшается в e раз по сравнению с начальной разностью температур T_0.
3. Найдите зависимость объёма левой части цилиндра от времени $V_1(t)$.

▲ **Решение.** **Что происходит.** Тепло течёт через поршень от горячего газа слева к холодному справа. Цилиндр теплоизолирован, и общий объём не меняется, поэтому энергия всей системы сохраняется. Поршень лёгкий и без трения: сумма сил на него равна нулю в каждый момент, то есть давления слева и справа одинаковы. Эти два факта, сохранение энергии и равенство давлений, определяют всё.

Обозначения. ν_1, ν_2 — количества газа слева и справа; $T_1(t), T_2(t)$, $V_1(t), V_2(t)$ — температуры и объёмы частей; $p(t)$ — общее давление; $\Delta T = T_1 - T_2$.

1. Количества газа. Из уравнения Клапейрона — Менделеева для начального состояния: $p_0 V_0 = \nu_1 R \cdot 2T_0$ и $p_0 V_0 = \nu_2 R \cdot T_0$. Отсюда $\nu_2 = 2\nu_1$ и $\nu_1 R = \frac{p_0 V_0}{2T_0}$.



Тепло идёт слева направо; поршень медленно смещается влево, давления по обе стороны равны

2. Конечная температура. Внутренняя энергия одноатомного газа $U = \frac{3}{2}\nu RT$. Работа, которую один газ совершает над другим через поршень, у них одинакова по модулю и противоположна по знаку, наружу энергия не уходит (цилиндр теплоизолирован). Первое начало термодинамики для всей системы от начального до промежуточного состояния: $Q = \Delta U + A = 0$, работа и теплообмен внутренние, поэтому убыль внутренней энергии левой части равна прибыли правой:

$$\tfrac{3}{2}\nu_1 R(2T_0 - T_1) = \tfrac{3}{2}\nu_2 R(T_2 - T_0) \implies \nu_1(2T_0 - T_1) = 2\nu_1(T_2 - T_0). \quad (1)$$

Когда температуры выровняются, $T_1 = T_2 = T$: $2T_0 - T = 2T - 2T_0$, откуда $T = \frac{4}{3}T_0$.

3. Давление не меняется. Запишем энергию как $U = \frac{3}{2}(p_1 V_1 + p_2 V_2)$. Поршень лёгкий, $p_1 = p_2 = p$, а $V_1 + V_2 = 2V_0$, поэтому $U = 3pV_0$.

В начале $U = 3p_0V_0$. Энергия сохраняется, значит $p(t) = p_0$ всё время: каждая часть газа нагревается или остывает *изобарически*. Молярная теплоёмкость при постоянном давлении $c_p = \frac{5}{2}R$.

4. Время релаксации. За малое время dt левая часть отдаёт $\alpha\Delta T\,dt$, а правая столько же получает:

$$\tfrac{5}{2}\nu_1 R\,dT_1 = -\alpha\Delta T\,dt, \qquad \tfrac{5}{2}\nu_2 R\,dT_2 = +\alpha\Delta T\,dt.$$

Поделим на теплоёмкости и вычтем:

$$\frac{d\Delta T}{dt} = -\frac{2\alpha}{5R}\Big(\frac{1}{\nu_1}+\frac{1}{\nu_2}\Big)\Delta T, \qquad \frac{1}{\nu_1}+\frac{1}{\nu_2} = \frac{2RT_0}{p_0V_0}+\frac{RT_0}{p_0V_0} = \frac{3RT_0}{p_0V_0}.$$

Обозначим $\lambda = \frac{2\alpha}{5R}\cdot\frac{3RT_0}{p_0V_0}$; тогда $\frac{d\Delta T}{\Delta T} = -\lambda\,dt$, интегрируем от $\Delta T(0) = T_0$: $\ln\frac{\Delta T}{T_0} = -\lambda t$. Получили экспоненту: $\Delta T = T_0e^{-\lambda t}$, $\lambda = \frac{6\alpha T_0}{5p_0V_0}$. Разность уменьшается в e раз за время $\tau = 1/\lambda$:

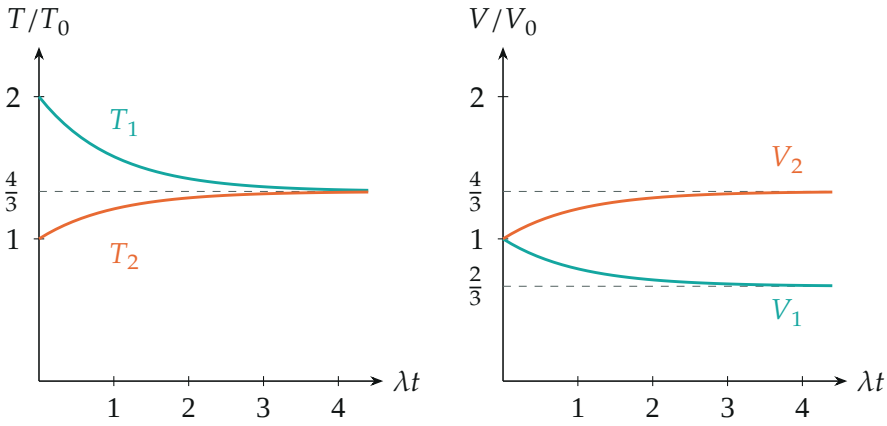
$$\tau = \frac{5p_0V_0}{6\alpha T_0}.$$

5. Температуры и объём левой части. Из (1): $T_2 = 2T_0 - \frac{1}{2}T_1$. Тогда $\Delta T = \frac{3}{2}T_1 - 2T_0 = T_0e^{-\lambda t}$, и

$$T_1 = \tfrac{4}{3}T_0 + \tfrac{2}{3}T_0e^{-\lambda t}, \qquad T_2 = \tfrac{4}{3}T_0 - \tfrac{1}{3}T_0e^{-\lambda t}.$$

Левая часть — газ при $p = p_0$, поэтому $V_1 = \frac{\nu_1 RT_1}{p_0} = \frac{V_0}{2T_0}T_1$:

$$V_1(t) = \tfrac{2}{3}V_0 + \tfrac{1}{3}V_0e^{-\lambda t}.$$



Температуры (слева) и объёмы частей (справа); пунктир — пределы

Обратите внимание. Время τ относится к разности температур $\Delta T = T_1 - T_2$ (её начальное значение T_0), а не к самим T_1 или T_2. Тепло здесь передаётся при постоянном давлении, поэтому в уравнении баланса стоит $c_p = \frac{5}{2}R$, а не $c_V = \frac{3}{2}R$.

Проверка. Размерность: $[\alpha]$ = Дж/(с · К), $[p_0V_0]$ = Дж, тогда $\alpha T_0/(p_0V_0)$ имеет размерность 1/с. Второй способ: всё тепло, перешедшее слева направо, равно $\int \alpha \Delta T\, dt = \alpha T_0/\lambda = \frac{5}{6}p_0V_0$; левая часть при p_0 отдала $\frac{5}{2}\nu_1 R \cdot \frac{2}{3}T_0 = \frac{5}{6}p_0V_0$, правая получила $\frac{5}{2}\nu_2 R \cdot \frac{1}{3}T_0 = \frac{5}{6}p_0V_0$. Кроме того, $V_1 + V_2 = 2V_0$ в любой момент. Смысл: газ слева, остывая под постоянным давлением, сжимается и «выдавливает» поршень влево, пока температуры не сравняются.

Ответ. 1) $T = \frac{4}{3}T_0$; 2) $\tau = \frac{5p_0V_0}{6\alpha T_0}$; 3) $V_1(t) = \frac{2}{3}V_0 + \frac{1}{3}V_0 e^{-\lambda t}$, где $\lambda = \frac{6\alpha T_0}{5p_0V_0}$.