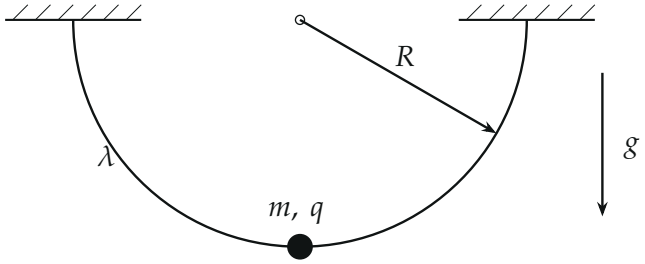
Колебания бусинки

Задача 2. [МОШ 2024/25, 11 класс, задача 2] На гладком, равномерно заряженном полукольце радиусом R, закреплённом в вертикальной плоскости, в его нижней точке покоится одноимённо заряженная бусинка массой m и зарядом q. Линейная плотность заряда полукольца равна λ. Ускорение свободного падения равно g.



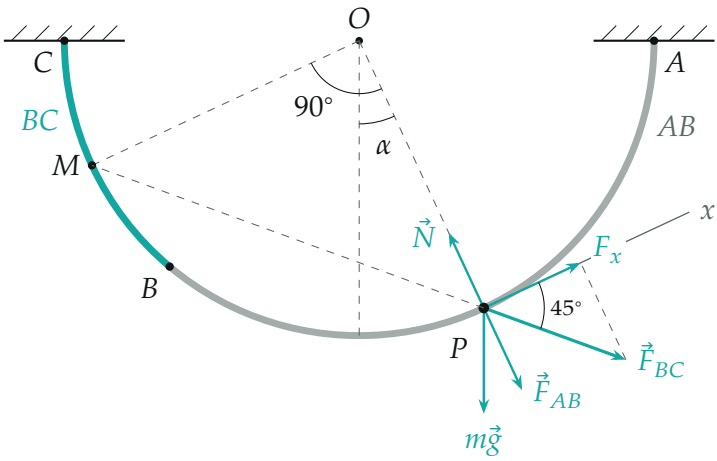
1. При каких значениях заряда q равновесие бусинки будет устойчивым? Параметры λ, g, R и m считаются известными.
2. Пусть заряд бусинки q таков, что положение её равновесия в нижней точке полукольца является устойчивым. Определите период малых колебаний бусинки вблизи положения равновесия. Параметры λ, q, g, R и m известны.

▲ **Решение. Что происходит.** На бусинку действуют сила тяжести, реакция гладкого кольца (перпендикулярна кольцу) и кулоновское отталкивание зарядов полукольца. В нижней точке силы уравновешены по симметрии. Устойчивость решает проекция сил на касательную к кольцу при малом смещении: тяжесть возвращает бусинку вниз, а отталкивание от зарядов полукольца, наоборот, выталкивает её дальше. Главная идея: почти всё полукольцо даёт силу строго по нормали, и только маленький «непарный» кусочек дуги даёт касательную силу.

Обозначения. $\alpha \ll 1$ — угол смещения бусинки от нижней точки, $x = R\alpha$ — смещение вдоль кольца, $k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$; заряды q и λ одного знака, величины берём по модулю.

1. Какая часть полукольца действует вдоль касательной. Сместим бусинку на угол α вправо. Справа от неё до конца кольца угол $\frac{\pi}{2} - \alpha$,

слева $\frac{\pi}{2}+\alpha$. Возьмём слева и справа от радиуса OP по дуге в $\frac{\pi}{2}-\alpha$ (участок AB на рисунке). Для двух симметричных элементов расстояния до бусинки одинаковы, а их силы составляют с касательной равные углы с разных сторон, поэтому касательные составляющие взаимно уничтожаются, и весь участок AB действует на бусинку *по нормали* (радиально наружу). Остаётся «непарная» дуга BC у левого конца длиной $2\alpha R$.



Бусинка в точке P смещена на угол α; дуга BC (бирюзовая) — «непарная» часть полукольца, M — её середина; сила $\vec{F}_{BC}$ направлена от M к P, $F_x = F_{BC}\cos 45°$ — её проекция на ось x

2. Сила от дуги BC**.** Угол α мал, поэтому заряд дуги $\delta Q = \lambda \cdot 2\alpha R$ можно считать точечным и находящимся в её середине M. Угол MOP равен $\frac{\pi}{2}$ (от M до P вдоль кольца ровно четверть окружности), так что $MP = \sqrt{2}R$ и треугольник OMP — прямоугольный равнобедренный. Тогда

$$F_{BC} = \frac{kq\,\delta Q}{MP^2} = \frac{kq\lambda \cdot 2\alpha R}{2R^2} = \frac{kq\lambda\,\alpha}{R}.$$

Угол между хордой MP и радиусом OP равен 45°, значит, и с касательной хорда составляет 45°. Касательная составляющая силы от дуги BC

направлена *от* положения равновесия (прочь от нижней точки):

$$F_{BC,x} = F_{BC}\cos 45^\circ = \frac{kq\lambda\,\alpha}{\sqrt{2}\,R}.$$

3. Уравнение движения. Второй закон Ньютона для бусинки в проекции на ось x, направленную по касательной от нижней точки: составляющая тяжести $mg\sin\alpha \approx mg\alpha$ направлена к нижней точке (против оси x), реакция $\vec{N}$ и $\vec{F}_{AB}$ направлены по нормали и в проекцию не входят:

$$m\ddot{x} = -mg\alpha + \frac{kq\lambda\,\alpha}{\sqrt{2}\,R} = -\Big(\frac{mg}{R} - \frac{kq\lambda}{\sqrt{2}\,R^2}\Big)x.$$

Пункт 1. Равновесие устойчиво, если сила при смещении возвращает бусинку, то есть коэффициент при x положителен:

$$\frac{mg}{R} > \frac{kq\lambda}{\sqrt{2}\,R^2} \iff q < \frac{\sqrt{2}\,mgR}{k\lambda}.$$

При равенстве линейная возвращающая сила обращается в нуль, и равновесие в линейном приближении нейтрально. Поэтому границей устойчивости служит

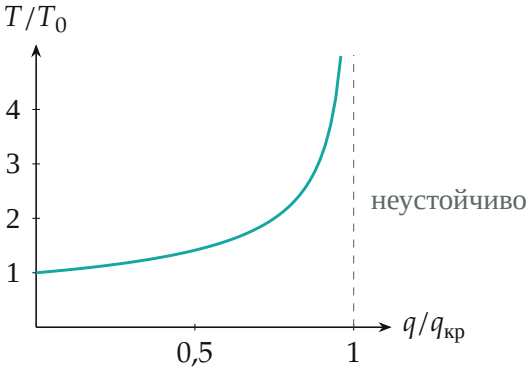
$$q_{\text{кр}} = \frac{\sqrt{2}\,mgR}{k\lambda}, \qquad q < q_{\text{кр}}.$$

Пункт 2. При $q < q_{\text{кр}}$ уравнение имеет вид $\ddot{x} = -\omega^2 x$, то есть гармонические колебания с

$$\omega^2 = \frac{g}{R} - \frac{kq\lambda}{\sqrt{2}\,mR^2} = \frac{\sqrt{2}\,mgR - kq\lambda}{\sqrt{2}\,mR^2},$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{\sqrt{2}\,mR^2}{\sqrt{2}\,mgR - kq\lambda}}.$$

Через критический заряд: $T = T_0/\sqrt{1 - q/q_{кр}}$, где $T_0 = 2\pi\sqrt{R/g}$ — период без заряда.



Период малых колебаний растёт с зарядом и обращается в бесконечность на границе устойчивости

Обратите внимание. Дуга BC мала ($2\alpha R$), но именно она даёт касательную силу: вклад всей остальной дуги в проекцию на касательную равен нулю. Если «выбросить» из рассмотрения этот непарный кусочек, получится, что отталкивание никак не влияет на устойчивость.

Проверка. Размерность: $kq\lambda$ — это (Н·м^2/Кл^2)·Кл·(Кл/м) = Н·м, как и mgR, поэтому подкоренное выражение имеет размерность с^2. Предел $q \to 0$: $T = 2\pi\sqrt{R/g}$ — период математического маятника длиной R. Второй способ: прямое интегрирование кулоновских сил по всему полукольцу даёт касательную силу $F_x(\alpha) = \frac{kq\lambda}{2R}\left[\frac{1}{\sin(\pi/4-\alpha/2)} - \frac{1}{\sin(\pi/4+\alpha/2)}\right]$, при малых α она равна $\frac{kq\lambda\alpha}{\sqrt{2}R}$, как в пункте 2. Смысл: отталкивание «размягчает» маятник, и чем сильнее заряд, тем медленнее колебания, пока бусинка вообще не соскользнёт.

Ответ. 1) $q < \dfrac{\sqrt{2}\,mgR}{k\lambda}$ (на границе линейная возвращающая сила равна нулю); 2) $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{\sqrt{2}\,mR^2}{\sqrt{2}\,mgR - kq\lambda}}$, где $k = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}$.