Поле в центре

Задача 3. [МОШ 2024/25, 11 класс, задача 3] В этой задаче рассматриваются плоские конструкции, изготовленные из однородной проволоки постоянного сечения, единица длины которой имеет сопротивление ρ. Требуется определить индукцию магнитного поля, порождаемую токами, текущими по проволоке.

1. Проволочной конструкцией, рассматриваемой в этом пункте, является кольцо радиусом r. В точках 1, 2 и 3, находящихся на равных расстояниях друг от друга (см. рис. 1), к кольцу подключены источники ЭДС, так что если положить потенциал точки 3 равным нулю, то потенциалы точек 1 и 2 окажутся равными φ_1 и φ_2 соответственно. Определите индукцию магнитного поля, создаваемого участком 1-2 в центре кольца.

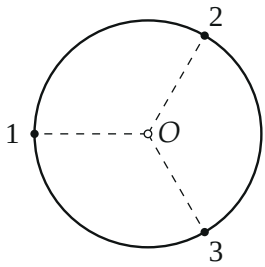


Рис. 1

2. В этом пункте рассматривается плоская конструкция, изображённая на рис. 2. Она состоит из двух концентрических колец, двух радиальных перемычек и двух длинных, прямолинейных проводников. Точками чёрного цвета обозначены точки спая. В точке A контакта между проволоками нет. Радиусы концентрических проволочных колец равны r и $2r$, углы между прямолинейными проволочными участками равны α, как показано на рисунке. Определите индукцию магнитного поля в общем центре колец, в точке O.

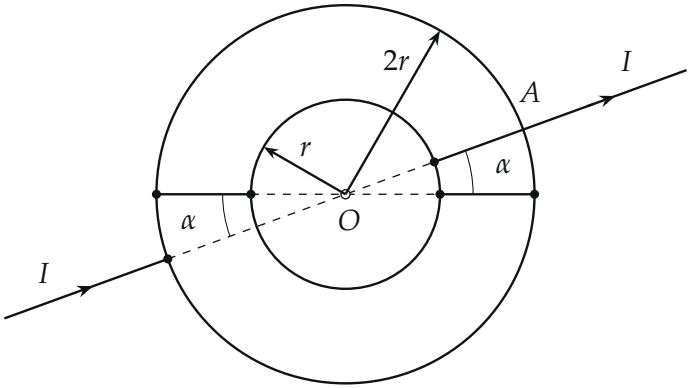


Рис. 2

▲ **Решение. Что происходит.** Поле в центре создают участки проволоки по закону Био — Савара — Лапласа. Участок проволоки на прямой, проходящей через центр, поля в центре не даёт. Для дуги кольца ток задаёт разность потенциалов на её концах (закон Ома), и оказывается, что поле дуги в центре зависит только от этой разности, а не от длины дуги. Сумма таких разностей по замкнутому кольцу — нуль.

Обозначения. μ_0 — магнитная постоянная; ось z перпендикулярна плоскости рисунка и направлена на нас; L — длина дуги, $\theta = L/R$ — её угловой размер, R — радиус кольца.

Пункт 1.

1. Ток по участку. Источники ЭДС подключены в точках 1, 2, 3 снаружи, на самой дуге 1-2 их нет. Сопротивление дуги 1-2 равно ρL (проволока однородная). Ток, текущий от точки 2 к точке 1 (в сторону убывания потенциала), по закону Ома

$$I_{21} = \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{\rho L}.$$

Он алгебраический: при $\varphi_2 < \varphi_1$ получится отрицательное число, то есть ток идёт от 1 к 2.

2. Поле дуги в центре. Все элементы дуги dl лежат на расстоянии r от центра и перпендикулярны радиусу, поэтому по закону Био — Савара — Лапласа каждый создаёт индукцию $dB = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\,dl}{r^2}$, направленную

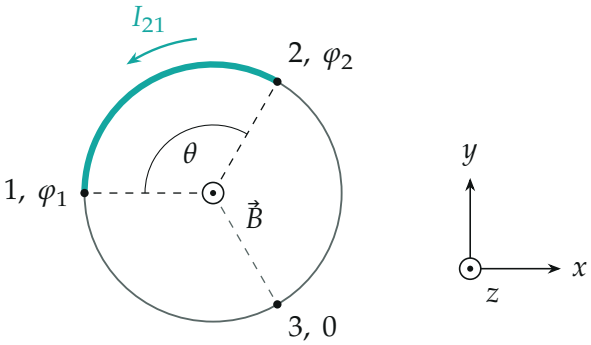
перпендикулярно плоскости рисунка, у всех элементов в одну сторону. Складываем:

$$B_z = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I_{21}L}{r^2}.$$

3. Подстановка. Длина дуги L сокращается:

$$B_z = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{(\varphi_2-\varphi_1)L}{\rho L\, r^2} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\varphi_2-\varphi_1}{\rho\, r^2}.$$

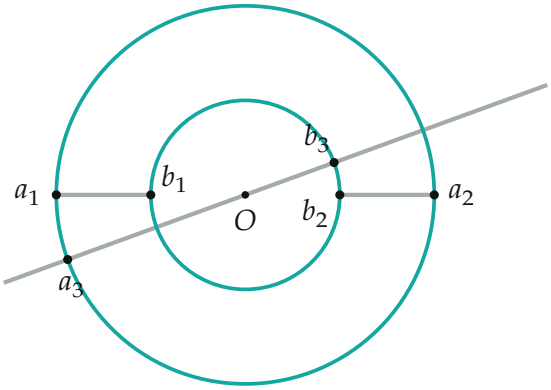
Направление: при $\varphi_2 > \varphi_1$ ток идёт от точки 2 (на 60°) к точке 1 (на 180°) против часовой стрелки, поэтому поле направлено на нас, $B_z > 0$.



Дуга 1-2 (бирюзовая) и ток I_{21} на ней; поле в центре направлено на нас (знак ⊙)

Пункт 2.

1. Что поля не создаёт. Радиальные перемычки и два прямых провода лежат на прямой, проходящей через O: у каждого элемента $d\vec{l} \parallel \vec{r}$, векторное произведение $d\vec{l} \times \vec{r} = 0$, поля в O нет. Угол α и точка A (там провода не соединены, ток прямого провода по кольцу не идёт) на ответ не влияют.



Серые участки лежат на прямых через O и поля не дают; поле создают только бирюзовые дуги колец, у каждого кольца свои узлы a_i и b_i

2. Поле дуги любого кольца. Для дуги радиуса R между соседними узлами i и j (обход против часовой стрелки) ток равен $\frac{\varphi_i-\varphi_j}{\rho R\theta}$, и тот же вывод, что в пункте 1, даёт

$$B_{z,ij} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\,\theta}{R} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\varphi_i-\varphi_j}{\rho R^2}.$$

Радиус кольца и угол дуги сократились (кроме множителя $1/R^2$, общего у всех дуг одного кольца).

3. Сумма по кольцу. Каждое из двух колец разбито узлами на три дуги; обходим кольцо против часовой стрелки от узла к узлу и складываем:

$$B_{\text{кольца}} = \frac{\mu_0}{4\pi\rho R^2}\left[(\varphi_1-\varphi_2)+(\varphi_2-\varphi_3)+(\varphi_3-\varphi_1)\right] = 0.$$

На кольцах нет источников ЭДС, поэтому на каждой дуге работает закон Ома в этом виде. Потенциал в каждой точке кольца определён однозначно, и сумма разностей по замкнутому обходу — телескопическая, равна нулю при любых токах, в том числе при подведённом и отведённом токе I. Для каждого кольца это верно отдельно, поэтому и радиусы r и $2r$ можно не различать.

Обратите внимание. Токи по ветвям сетки (правила Кирхгофа) ис-

кать не нужно: поле каждого кольца сводится к сумме разностей потенциалов, которая равна нулю при любых токах.

Проверка. Размерность: μ_0 измеряется в Тл·м/А, отношение $\Delta\varphi/\rho$ — в А·м (вольт на ом/м), деление на r^2 даёт м$^{-2}$; произведение — тесла. Если $\varphi_1 = \varphi_2$, тока на участке 1-2 нет, и $B = 0$. Второй способ для кольца с двумя подводами в диаметрально противоположных точках: две половины колец проводят одинаковый ток в разные стороны (по одной и против часовой стрелки), их поля в центре равны и противоположны — сумма нуль, как и по формуле. Для пункта 2 сетку из шести узлов решили численно (правила Кирхгофа и закон Био — Савара — Лапласа по дугам) при $\alpha = 30°$: поле в центре равно нулю до погрешности вычислений.

Ответ. 1) $B_z = \dfrac{\mu_0}{4\pi}\,\dfrac{\varphi_2 - \varphi_1}{\rho r^2}$ (ось z перпендикулярна плоскости рисунка и направлена на нас); 2) $B = 0$.