Пизанская башня

Задача 5. [МОШ 2024/25, 11 класс, задача 5] Согнутую в виде спирали металлическую полосу можно использовать в качестве пружины кручения, то есть пружины, препятствующей повороту механизмов (см. рис. 3). При попытке распрямить или скрутить такую пружину она развивает возвращающий момент сил M, пропорциональный углу поворота α: $M = \gamma\alpha$, где γ — постоянный коэффициент жёсткости кручения пружины. Нижний конец лёгкого жёсткого вертикального стержня длиной l жёстко скреплён со свободным концом пружины кручения. Внутренний конец пружины закреплён. К верхнему концу стержня прикладывается сила F, направленная вертикально вниз.

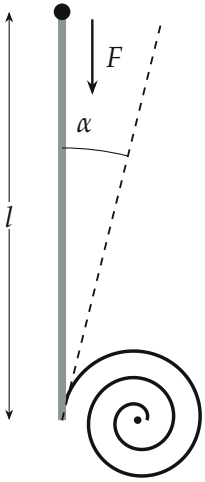


Рис. 3

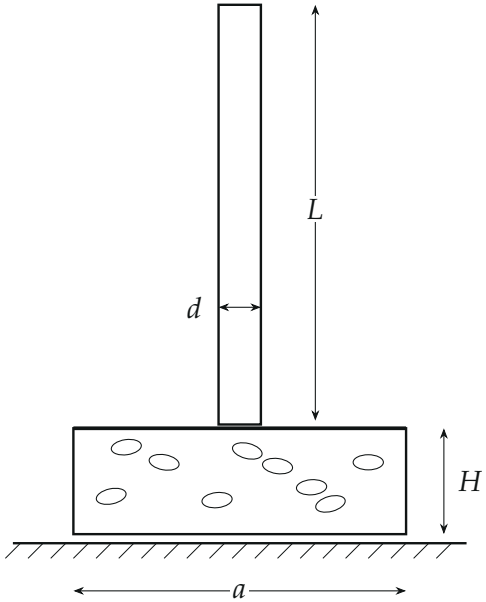


Рис. 4

1. При какой максимальной силе $F_{\max}$ вертикальное положение равновесия стержня ещё будет оставаться устойчивым?
2. Каким будет угол отклонения, если сила воздействия будет равна $F = 1{,}01F_{\max}$?

Пизанская башня — один из известнейших памятников архитектуры. Башня отличается тем, что её ось отклонена на некоторый угол от вертикали из-за мягкости грунта под её основанием. Рассмотрим модель башни, стоящей на грунте. Башня представляет собой однородный цилиндр, высотой L и диаметром d (рис. 4), масса единицы длины башни равна λ. Башня поставлена по центру на жёсткое невесомое квадратное основание со стороной a, к которому снизу приклеена поролоновая подушка того же сечения. Высота подушки, после установки на неё башни составляет H. Вся конструкция установлена на жёстком столе. Масса распределена по башне однородно. Модуль Юнга поролона равен E. Коэффициент трения между башней и основанием можно считать достаточно большим, так что башня не проскальзывает относительно основания.

3. При какой минимальной высоте башни L_1 она займёт устойчивое наклонное положение?
4. При какой минимальной высоте башни L_2 она опрокинется? Выразите ответ через L_1 и d, считая $d \ll L_1$.

Указание 1. При малой относительной деформации $\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}$ растяжения/сжатия стержня с площадью поперечного сечения S сила упругости, возникающая в нём, может быть рассчитана по формуле $F = E\varepsilon S$, где E — модуль Юнга материала стержня.

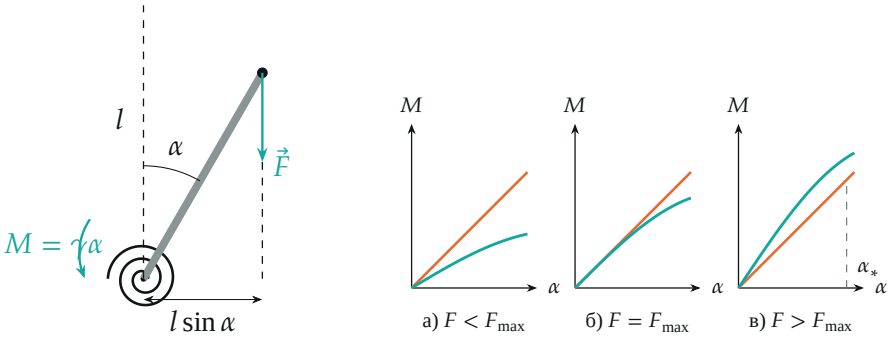
Указание 2. При ответе на вопросы разных пунктов задачи могут оказаться очень полезными приближённые формулы, справедливые для малых значений α ($\alpha \ll 1$): $\sin\alpha \approx \alpha - \frac{\alpha^3}{6}$, $\operatorname{tg}\alpha \approx \alpha + \frac{\alpha^3}{3}$.

▲ **Решение. Что происходит.** В обеих частях есть «опрокидывающий» момент (сила F у стержня, вес у башни) и «возвращающий» момент упругой опоры (пружина, поролон). Пока при малом наклоне возвращающий момент больше, вертикаль устойчива; когда меньше, система уходит в наклонное положение. Опрокидывающий момент растёт с углом как sin, медленнее прямой, поэтому наклонное равновесие находится.

Пункт 1. Критическая сила. Отклоним стержень на угол α. Сила F вертикальна, её плечо относительно оси пружины $l\sin\alpha$, она увеличи-

вает отклонение; пружина возвращает моментом $\gamma\alpha$. Равновесие:

$$Fl\sin\alpha = \gamma\alpha.$$



Слева — стержень, отклонённый на α: плечо силы F равно $l\sin\alpha$. Справа — моменты $\gamma\alpha$ (оранжевая прямая) и $Fl\sin\alpha$ (бирюзовая синусоида) при трёх значениях силы

Корень $\alpha = 0$ есть всегда; ненулевой появляется, только если синусоида выходит над прямой. У начала координат наклон синусоиды Fl, прямой γ, дальше синус отстаёт. В случае а) $Fl < \gamma$ синусоида ниже прямой, возвращающий момент больше при любом отклонении, вертикаль устойчива. В случае в) $Fl > \gamma$ при малом α опрокидывающий момент больше, вертикаль неустойчива, равновесие — при α_*. Граница — случай б), наклоны совпадают: $F_{\max}l = \gamma$.

Пункт 2. Угол при $F = 1{,}01F_{\max}$. Ненулевой корень: $\sin\alpha/\alpha = \gamma/(Fl) = 1/1{,}01$. Угол мал, $\sin\alpha \approx \alpha - \alpha^3/6$:

$$1 - \frac{\alpha^2}{6} = \frac{1}{1{,}01} \implies \alpha = \pm\sqrt{6\Big(1 - \frac{1}{1{,}01}\Big)} \approx \pm 0{,}24 \text{ рад} \approx \pm 14^\circ.$$

Два симметричных положения — стержень падает влево или вправо.

Пункт 3. Поролон как пружина кручения. Наклоним основание на малый угол φ вокруг оси через его центр (вес башни не меняется, значит, центр основания не смещается). На расстоянии x от центра высота подушки меняется на $x\,\mathrm{tg}\,\varphi$: с одной стороны поролон сжимается, с другой

растягивается (он приклеен). Относительная деформация $\varepsilon = x\,\mathrm{tg}\,\varphi/H$. Полоска шириной dx имеет площадь $ds = a\,dx$, сила по закону Гука $dF = E\varepsilon\,ds = \frac{Ea\,\mathrm{tg}\,\varphi}{H}\,x\,dx$, момент $dM = x\,dF$. Две половины основания дают одинаковый вклад:

$$M = 2\int_0^{a/2} \frac{Ea\,\mathrm{tg}\,\varphi}{H}\,x^2\,dx = \frac{Ea\,\mathrm{tg}\,\varphi}{H}\cdot\frac{2}{3}\Big(\frac{a}{2}\Big)^3 = \frac{Ea^4}{12H}\,\mathrm{tg}\,\varphi.$$

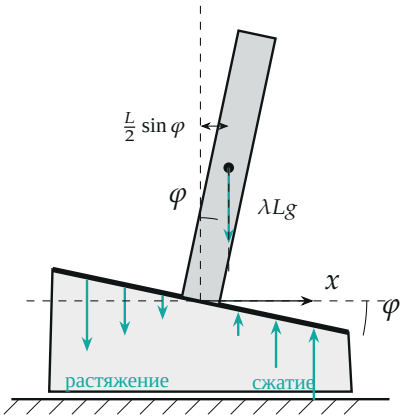
Момент тяжести башни (масса λL, центр масс на высоте $L/2$, плечо $\frac{L}{2}\sin\varphi$) относительно центра основания: $M_б = \frac{\lambda g L^2}{2}\sin\varphi$. Равновесие:

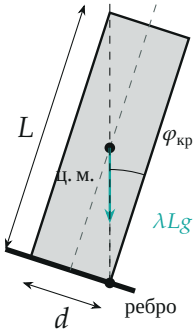
$$\frac{Ea^4}{12H}\,\mathrm{tg}\,\varphi = \frac{\lambda g L^2}{2}\sin\varphi.$$

Корень $\varphi = 0$ — вертикаль; для наклонного делим на $\sin\varphi$ (учитывая $\mathrm{tg}\,\varphi/\sin\varphi = 1/\cos\varphi$):

$$\frac{1}{\cos\varphi} = \frac{L^2}{L_1^2}, \qquad L_1 = \sqrt{\frac{Ea^4}{6\lambda g H}}.$$

Так как $\cos\varphi \le 1$, наклонное положение существует только при $L > L_1$ (при $L = L_1$ наклоны моментов в нуле совпадают, как в пункте 1) и устойчиво: тангенс растёт быстрее синуса.





Наклонённая башня (слева) и предельное положение (справа)

Пункт 4. Опрокидывание. Башня держится на основании без проскальзывания, пока вертикаль, опущенная из центра масс, проходит через основание башни. Центр масс на высоте $L/2$, край основания на $d/2$ от оси, значит, критический наклон

$$\frac{L}{2}\sin\varphi_{\text{кр}} = \frac{d}{2}\cos\varphi_{\text{кр}} \implies \operatorname{tg}\varphi_{\text{кр}} = \frac{d}{L}, \qquad \cos\varphi_{\text{кр}} = \Bigl(1+\frac{d^2}{L^2}\Bigr)^{-1/2}.$$

Наклонное равновесие даёт $\cos\varphi = L_1^2/L^2$: чем выше башня, тем больше наклон. Башня опрокидывается, когда он достигает критического, и L_2 определяется равенством

$$\frac{L_1^2}{L_2^2} = \frac{1}{\sqrt{1+d^2/L_2^2}} \implies L_2^2 = L_1^2\sqrt{1+\frac{d^2}{L_2^2}}.$$

Так как $d \ll L_1$, под корнем можно взять $L_2 \approx L_1$:

$$L_2^2 = L_1^2\Bigl(1+\frac{d^2}{2L_1^2}\Bigr), \qquad L_2 = L_1\sqrt{1+\frac{d^2}{2L_1^2}} \approx L_1\Bigl(1+\frac{d^2}{4L_1^2}\Bigr).$$

Проверка. Размерность: $[\gamma/l] = \text{Н}$; $[Ea^4/(\lambda g H)] = \text{м}^2$. Второй способ для пункта 1 — энергия: $U(\alpha) = \frac{1}{2}\gamma\alpha^2 + Fl\cos\alpha$, $U''(0) = \gamma - Fl > 0$ при $F < \gamma/l$ — тот же $F_{\max}$. Пределы: $d \to 0$ даёт $L_2 \to L_1$ (тонкая башня падает, как только появляется наклон), $H \to 0$ даёт $L_1 \to \infty$. Башня высотой между L_1 и L_2 наклоняется, но стоит — как Пизанская.

Ответ. 1) $F_{\max} = \dfrac{\gamma}{l}$; 2) $\alpha \approx 0{,}24$ рад $\approx 14°$; 3) $L_1 = \sqrt{\dfrac{Ea^4}{6\lambda g H}}$; 4) $L_2 = L_1\sqrt{1+\dfrac{d^2}{2L_1^2}} \approx L_1\Bigl(1+\dfrac{d^2}{4L_1^2}\Bigr)$.