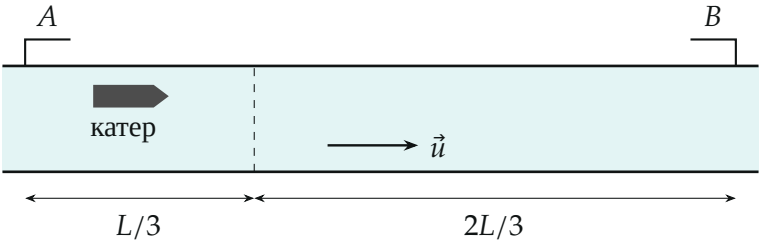
Туман на реке

Задача 1. [МОШ 2024/25, 7 класс, задача 1] Ровно в полдень от пристани A к пристани B вниз по течению реки отправились катер и моторная лодка. Скорости катера и лодки относительно воды равны $v_1 = 40$ км/ч и $v_2 = 25$ км/ч соответственно. Скорость течения реки $u = 5$ км/ч. Когда катер прошёл треть всего пути, на реку опустился густой туман, вследствие чего капитан катера решил не рисковать и заглушил мотор. Катер продолжил свой путь, дрейфуя по течению и не причаливая к берегу. Дрейф в тумане продолжался 30 минут, пока туман не рассеялся. После этого катер, не изменяя направление движения, продолжил свой путь с первоначальной скоростью относительно воды. Всё это время моторист продолжал вести лодку на свой страх и риск, не сбавляя скорости. К пристани B катер и лодка причалили одновременно.

1. В какое время катер и лодка подплыли к пристани B?
2. Какое максимальное расстояние (по реке) было между катером и лодкой в процессе движения?



Поясняющий рисунок: путь AB длины L вниз по течению; пунктир — место, где катер прошёл треть пути и опустился туман.

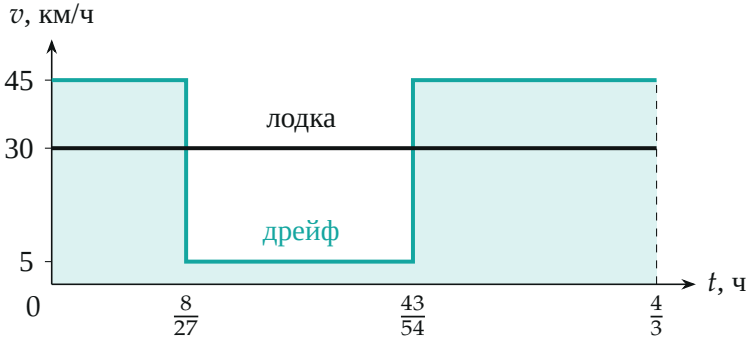
▲ **Решение. Что происходит.** Это задача на сложение скоростей и движение с остановками. Относительно берега скорость судна вниз по течению равна сумме его скорости относительно воды и скорости течения; заглушённый катер плывёт вместе с водой. Лодка весь путь идёт с одной скоростью, катер — быстрее, но полчаса дрейфует. Условие одновременного прибытия даёт уравнение на длину пути. Расстояние между

судами на каждом участке меняется равномерно, поэтому наибольшим оно может быть только в моменты смены режима катера.

Обозначения. L — длина пути AB; $\tau = 0{,}5$ ч — время дрейфа; t — время от полудня; $x_1(t)$, $x_2(t)$ — расстояния катера и лодки от A.

1. Скорости относительно берега. Закон сложения скоростей: скорость относительно берега равна скорости относительно воды плюс скорость воды. Все движения вниз по течению, поэтому

$$\begin{aligned} &\text{катер с мотором:} && v_1 + u = 45 \text{ км/ч},\\ &\text{катер в дрейфе:} && u = 5 \text{ км/ч},\\ &\text{лодка:} && v_2 + u = 30 \text{ км/ч}. \end{aligned}$$



Скорости относительно берега: катер (бирюзовый) и лодка (чёрный). Путь — площадь под графиком; закрашенная площадь катера равна площади прямоугольника лодки, $L = 40$ км.

Пункт 1.

2. Время катера. Первую треть пути катер идёт с мотором, затем τ дрейфует и проходит $u\tau = 2{,}5$ км, остальное снова идёт с мотором:

$$t_1 = \frac{L/3}{v_1 + u} + \tau + \frac{2L/3 - u\tau}{v_1 + u} = \frac{L - u\tau}{v_1 + u} + \tau.$$

3. Время лодки и одновременность. Лодка весь путь идёт с постоян-

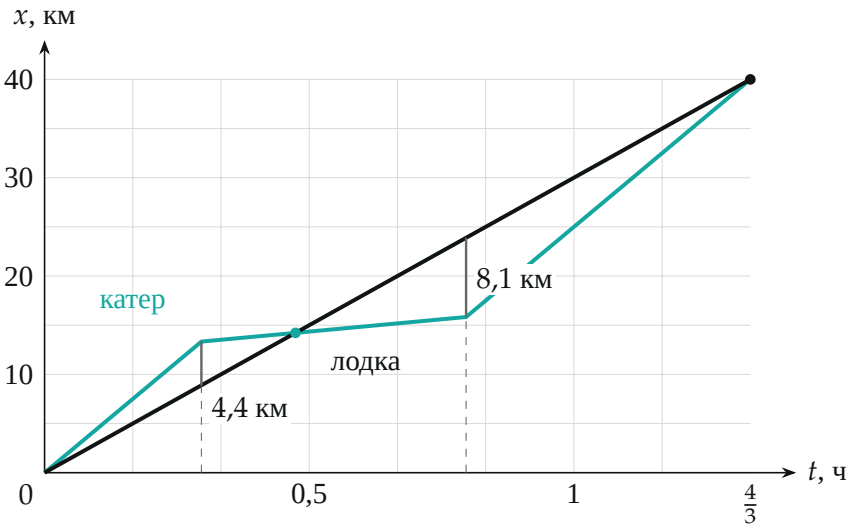
ной скоростью: $t_2 = \dfrac{L}{v_2 + u}$. Они причалили одновременно, $t_1 = t_2$:

$$\frac{L - u\tau}{v_1 + u} + \tau = \frac{L}{v_2 + u} \quad \Rightarrow \quad \frac{L - 2{,}5}{45} + 0{,}5 = \frac{L}{30}.$$

Умножим на 90: $2L - 5 + 45 = 3L$, откуда $L = 40$ км.

4. Время прибытия.

$$t_2 = \frac{40 \text{ км}}{30 \text{ км/ч}} = \frac{4}{3} \text{ ч} = 1 \text{ ч } 20 \text{ мин} \quad \Rightarrow \quad 13{:}20.$$



Координаты катера (бирюзовый) и лодки (чёрный) по вычисленным точкам. Пунктир — начало и конец тумана; серые отрезки — расстояние между судами в эти моменты. Бирюзовая точка — лодка обгоняет дрейфующий катер.

Пункт 2.

5. Как меняется расстояние. На каждом участке оба судна идут с постоянными скоростями, поэтому расстояние между ними меняется равномерно (графики $x(t)$ — отрезки прямых). Значит, наибольшее расстояние может быть только на концах участков: в начале тумана, в его конце или на старте и финише (там расстояние ноль).

- До тумана катер быстрее лодки ($45 > 30$) и уходит вперёд.
- В тумане катер дрейфует ($5 < 30$): лодка его догоняет, обгоняет и уходит вперёд.
- После тумана катер снова быстрее и догоняет лодку ровно к пристани B.

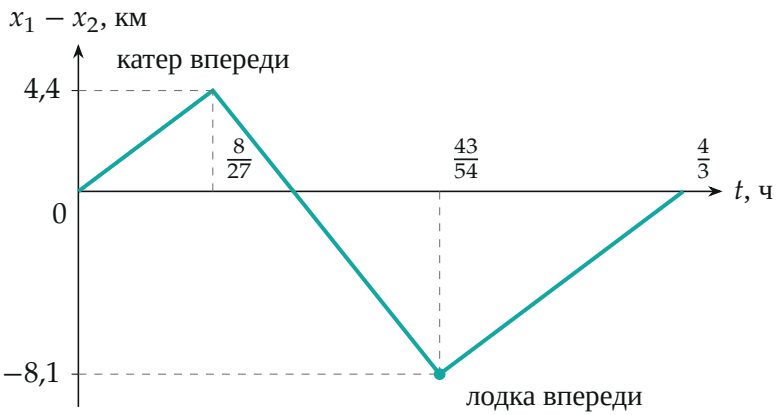
6. Начало тумана. Катер прошёл $L/3 = 13{,}3$ км за $t_н = \dfrac{L/3}{v_1 + u} = \dfrac{40/3}{45} = \dfrac{8}{27}$ ч $\approx 17{,}8$ мин. Лодка за это время прошла $30 \cdot \frac{8}{27} = 8{,}89$ км. Катер впереди на

$$s_1 = \frac{L}{3} - (v_2 + u)\, t_н = 13{,}33 - 8{,}89 = 4{,}44 \text{ км}.$$

7. Конец тумана. Через $t_к = t_н + \tau = \frac{8}{27} + \frac{1}{2} = \frac{43}{54}$ ч катер находится в $13{,}33 + 2{,}5 = 15{,}83$ км от A, лодка — в $30 \cdot \frac{43}{54} = 23{,}89$ км. Теперь впереди лодка, на

$$s_2 = (v_2 + u)\, t_к - \left(\frac{L}{3} + u\tau\right) = 23{,}89 - 15{,}83 = 8{,}06 \text{ км} \approx 8{,}1 \text{ км}.$$

8. Проверка через относительную скорость. В тумане лодка приближается к катеру, а потом удаляется от него со скоростью $(v_2 + u) - u = v_2 = 25$ км/ч — скоростью лодки относительно воды, как и должно быть: в системе отсчёта воды дрейфующий катер стоит. За полчаса расстояние изменилось на $25 \cdot 0{,}5 = 12{,}5$ км: от $+4{,}44$ (катер впереди) до $4{,}44 - 12{,}5 = -8{,}06$ км (лодка впереди). После тумана катер догоняет со скоростью $45 - 30 = 15$ км/ч и за оставшиеся $\frac{4}{3} - \frac{43}{54} = \frac{29}{54}$ ч сокращает $15 \cdot \frac{29}{54} = 8{,}06$ км — как раз до нуля у пристани.



Расстояние «катер минус лодка» по вычисленным точкам: ломаная из трёх отрезков. Наибольшее по модулю значение — в момент, когда рассеялся туман.

9. Наибольшее расстояние. Сравним концы участков: 4,44 км $<$ 8,06 км. Наибольшее расстояние между судами

$$s_{\max} = s_2 = (v_2 + u)\left(\frac{L}{3(v_1 + u)} + \tau\right) - \frac{L}{3} - u\tau,$$

$$s_{\max} = 30 \cdot \frac{43}{54} - \frac{40}{3} - 2{,}5 \approx 8{,}1 \text{ км}.$$

Это расстояние было в 12:48, когда рассеялся туман.

Обратите внимание. Расстояние «по реке» — это модуль разности координат: до тумана впереди катер, после встречи в тумане (около 12:28) — лодка. Брать только расстояние в момент начала тумана — ошибка: в тумане лодка не только догоняет катер, но и уходит от него далеко вперёд.

Проверка. Размерность: км/(км/ч) = ч. Время катера: $13{,}33/45 + 0{,}5 + 24{,}17/45 = 0{,}296 + 0{,}5 + 0{,}537 = 1{,}333$ ч — совпадает со временем лодки. Предел: без тумана ($\tau = 0$) равенство $L/45 = L/30$ невозможно ни при каком L — катер пришёл бы раньше; именно полчаса дрейфа уравнивают время.

Смысл: полчаса простоя быстрого катера «съедают» его преимуще-

ство в скорости ровно на 40-километровом пути.

Ответ. 1) в 13:20 (путь $L = 40$ км); 2) $s_{\max} \approx 8{,}1$ км, в момент, когда рассеялся туман.