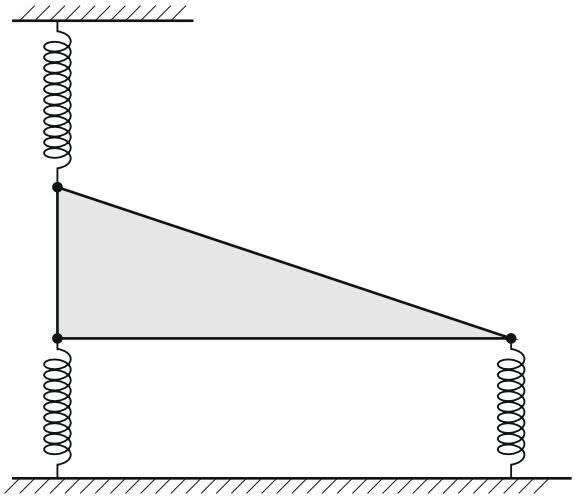
Треугольник на пружинках

Задача 3. [МОШ 2024/25, 7 класс, задача 3] Однородная пластина в форме прямоугольного треугольника соединена с тремя вертикальными пружинами жёсткостью 100 Н/м каждая. Пластина находится в положении устойчивого равновесия, при котором её основание горизонтально. Деформация двух пружин составляет 10 см, а деформация третьей — иная.



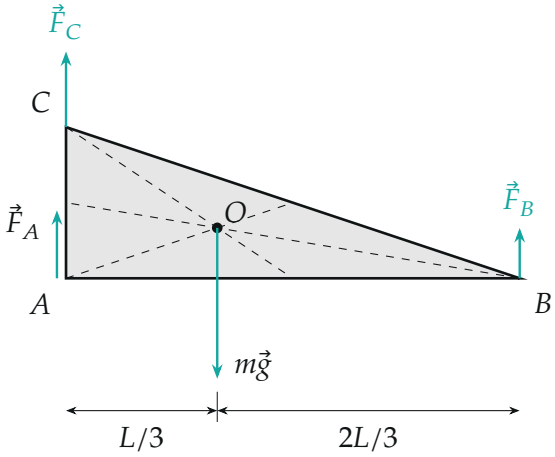
Определите массу пластины. Деформация какой пружины отличается от двух других? Чему равна деформация этой пружины? Длины пружин на рисунке условны.

Указание. Равновесие называется устойчивым, если после небольших внешних воздействий тело возвращается в исходное состояние равновесия.

▲ **Решение. Что происходит.** Это задача на равновесие твёрдого тела: сумма сил и сумма моментов сил, действующих на пластину, равны нулю. Все силы вертикальны: сила тяжести в центре тяжести и три силы упругости. Правило моментов сразу даёт силу правой пружины, условие сил — сумму двух левых. Какие пружины растянуты, а какие сжаты, заранее неизвестно, поэтому перебираем варианты, а лишний отсекаем условием устойчивости.

Обозначения. A — вершина прямого угла (снизу слева), C — верхняя вершина, B — правая вершина; L — длина основания AB; F_A, F_B, F_C — силы пружин, приложенные в этих вершинах, *со знаком*: плюс — вверх, минус — вниз; $k = 100$ Н/м; x — деформация.

1. Где центр тяжести. У однородного треугольника центр тяжести — в точке пересечения медиан, она делит каждую медиану в отношении $2:1$ от вершины. Его расстояние от катета AC равно трети основания: $x_O = L/3$.



Силы, действующие на пластину. Пунктир — медианы, O — центр тяжести. Направления $\vec{F}_A$ и $\vec{F}_C$ показаны условно: их знаки найдём ниже.

2. Правило моментов. Возьмём моменты относительно оси, проходящей через катет AC (перпендикулярно рисунку через точку A). Силы F_A и F_C приложены на этой вертикали и момента не дают. Остаются сила тяжести с плечом $L/3$ и сила правой пружины с плечом L:

$$F_B \cdot L = mg \cdot \frac{L}{3} \quad \Rightarrow \quad F_B = \frac{mg}{3} > 0.$$

Сила F_B направлена вверх: нижняя правая пружина *сжата*.

3. Условие для сил. Второй закон Ньютона для покоящейся пластины

в проекции на вертикаль вверх:

$$F_A + F_B + F_C = mg \quad \Rightarrow \quad F_A + F_C = \frac{2mg}{3}.$$

У верхней пружины растяжение даёт силу вверх, сжатие — вниз; у нижней левой наоборот: сжатие — вверх, растяжение — вниз. Модуль силы по закону Гука $|F| = kx$; деформация 10 см даёт 10 Н.

4. Перебор: какие две пружины деформированы на 10 см.

(а) Пружины A и C. Тогда $F_A + F_C$ равно 20, 0 или -20 Н. Нужно $\frac{2}{3}mg > 0$, значит, $F_A = F_C = +10$ Н, $mg = 30$ Н и $F_B = 10$ Н — третья пружина тоже на 10 см. Противоречие.

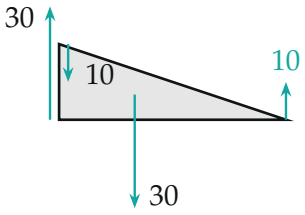
(б) Пружины B и C. $F_B = 10$ Н $\Rightarrow mg = 30$ Н, $F_A + F_C = 20$ Н. Если верхняя растянута ($F_C = +10$), то $F_A = 10$ — снова все три одинаковы, нельзя. Если верхняя сжата ($F_C = -10$), то $F_A = +30$ Н: нижняя левая сжата на 30 см.

(в) Пружины B и A. $mg = 30$ Н, $F_A + F_C = 20$ Н. При сжатой левой ($F_A = +10$) все три одинаковы. При растянутой ($F_A = -10$) $F_C = +30$ Н: верхняя пружина растянута на 30 см.

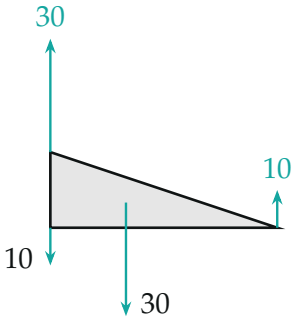
Во всех допустимых вариантах $mg = 30$ Н, то есть

$$m = \frac{3F_B}{g} = \frac{3 \cdot 10\ \text{Н}}{10\ \text{Н/кг}} = 3\ \text{кг}.$$

Осталось выбрать между вариантами (б) и (в).



(б) все три сжаты



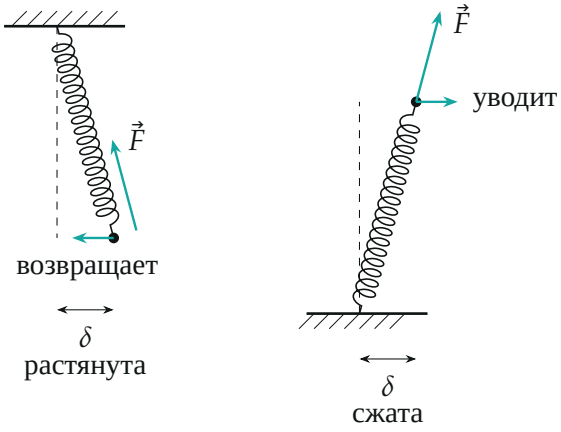
(в) A и C растянуты

Два варианта, удовлетворяющие условиям равновесия (силы в ньютонах, длины стрелок по модулю). В варианте (б) сжатая верхняя пружина давит на вершину C вниз.

5. Устойчивость. Сдвинем пластину немного вбок на δ. Концы пружин на потолке и полу остаются на месте, и пружина длины l наклоняется на малый угол δ/l; её сила направлена вдоль пружины и получает горизонтальную составляющую $|F|\,\delta/l$.

- Растянутая пружина *тянет* пластину к точке крепления — горизонтальная составляющая направлена назад, к положению равновесия: она возвращает.
- Сжатая пружина *толкает* пластину от точки крепления — составляющая направлена в сторону сдвига: она уводит дальше.

В варианте (б) сжаты все три пружины: при любом сдвиге все горизонтальные силы уводят пластину ещё дальше — равновесие неустойчиво. В варианте (в) растянутые пружины тянут назад с силами 30 и 10 Н, а сжатая толкает лишь с 10 Н — при сравнимых длинах пружин возвращающая сила больше, пластина возвращается. Значит, реализуется вариант (в).



Точка крепления пружины к пластине сдвинута вбок на δ (пунктир — прежнее положение пружины). Растянутая пружина тянет назад, сжатая — толкает дальше в сторону сдвига.

6. Ответ на вопросы. Отличается деформация верхней пружины: $F_C = +30$ Н — она растянута на

$$x_C = \frac{F_C}{k} = \frac{30\text{ Н}}{100\text{ Н/м}} = 0{,}3\text{ м} = 30\text{ см}.$$

Нижняя левая растянута на 10 см, нижняя правая сжата на 10 см.

Обратите внимание. Масса пластины одна и та же во всех вариантах, а вот «какая пружина и на сколько» без условия устойчивости определить нельзя: формально подходит и сжатая на 30 см нижняя левая пружина. Длины пружин на рисунке условны — по рисунку нельзя судить, какие пружины растянуты.

Проверка. Подставим вариант (в): силы $+30$, -10, $+10$ Н, сумма 30 Н $= mg$. Моменты относительно A: $10 \cdot L = 30 \cdot L/3$ — верно. Второй способ для правой пружины — моменты относительно точки O: силы в A и C имеют плечо $L/3$, сила в B — плечо $2L/3$: $(F_A + F_C)\frac{L}{3} = F_B \cdot \frac{2L}{3}$, то есть $20 = 2 \cdot 10$ — верно.

Смысл: равновесие под действием одних вертикальных сил возможно в нескольких вариантах, но в жизни остаётся только тот, где растянутые пружины держат пластину «на подвесе».

Ответ. $m = 3$ кг; отличается деформация верхней пружины — она растянута на 30 см (нижняя левая растянута, нижняя правая сжата на 10 см).