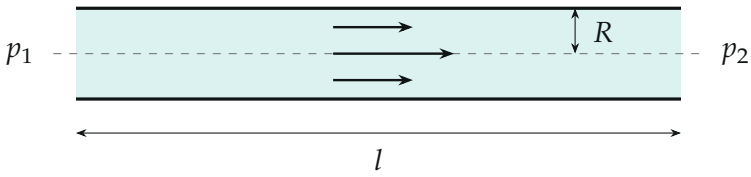
Течение Пуазейля

Задача 2. [МОШ 2024/25, 8 класс, задача 2] Объёмным расходом жидкости Q при течении по трубе называется объём жидкости, проходящий через поперечное сечение трубы в единицу времени. Формула Пуазейля используется для расчёта объёмного расхода при течении жидкости по трубе постоянного сечения с учётом вязкого трения. В случае небольшой скорости течения она имеет вид

$$Q = A \cdot \Delta p^x \cdot R^y \cdot \nu^z \cdot l^{-1},$$

где Δp — перепад давления на концах трубы; R и l — радиус и длина трубы соответственно; ν — коэффициент динамической вязкости жидкости, которая измеряется в кг/(м·с); A, x, y, z — некоторые безразмерные постоянные.

1. Пользуясь соображениями размерности, определите значения постоянных x, y и z.
2. Во сколько раз изменится скорость потока жидкости в водопроводной сети, если при том же давлении на входе увеличить диаметр труб вдвое?



Поясняющий рисунок: труба радиуса R и длины l, на концах давления p_1 и p_2, перепад $\Delta p = p_1 - p_2$; стрелки — скорости слоёв жидкости (у стенок вязкость тормозит течение).

▲ **Решение. Что происходит.** Пункт 1 — задача на метод размерностей: формула верна при любых единицах, поэтому степени килограмма, метра и секунды слева и справа обязаны совпасть. Это даёт три уравнения

на три неизвестные степени. Пункт 2 — связь расхода со скоростью: через сечение площади S за время Δt проходит цилиндр жидкости длины $v\,\Delta t$.

Обозначения. $[X]$ — единицы величины X в СИ; $S = \pi R^2$ — площадь сечения; v — средняя скорость потока.

Пункт 1.

1. Единицы всех величин. Расход — объём за время: $[Q] = \text{м}^3/\text{с}$. Давление — сила на площадь, а сила по второму закону Ньютона — масса на ускорение:

$$[\Delta p] = \frac{\text{Н}}{\text{м}^2} = \frac{\text{кг}\cdot\text{м}/\text{с}^2}{\text{м}^2} = \frac{\text{кг}}{\text{м}\cdot\text{с}^2}, \qquad [\nu] = \frac{\text{кг}}{\text{м}\cdot\text{с}}, \qquad [R] = [l] = \text{м}.$$

2. Килограммы. Килограмм есть только в Δp и ν, а в $[Q]$ его нет. Значит, степени должны компенсироваться: $x + z = 0$. Это означает, что в формулу входит только отношение $\Delta p/\nu$, единицы которого с^{-1}.

3. Уравнения на степени. Подставим единицы в формулу:

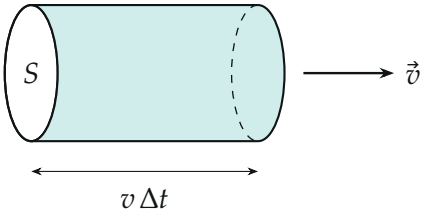
$$\frac{\text{м}^3}{\text{с}} = \left(\frac{\text{кг}}{\text{м}\cdot\text{с}^2}\right)^x \text{м}^y \left(\frac{\text{кг}}{\text{м}\cdot\text{с}}\right)^z \text{м}^{-1}.$$

Приравниваем степени каждой единицы:

$$\begin{aligned} &\text{кг:} \quad 0 = x + z,\\ &\text{с:} \quad -1 = -2x - z,\\ &\text{м:} \quad 3 = -x + y - z - 1. \end{aligned}$$

4. Решение системы. Из первого $z = -x$; подставим во второе: $-1 = -2x + x = -x$, откуда $x = 1$, $z = -1$. Из третьего: $3 = -1 + y + 1 - 1$, то есть $y = 4$. Итак,

$$Q = A\,\frac{\Delta p\, R^4}{\nu\, l}.$$



За время Δt через сечение S проходит цилиндр жидкости длины $v\,\Delta t$, его объём $Sv\,\Delta t$.

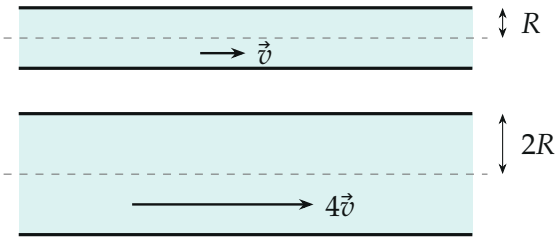
Пункт 2.

5. Расход и скорость. За время Δt через сечение проходит цилиндр объёмом $Sv\,\Delta t$ (рисунок выше), поэтому

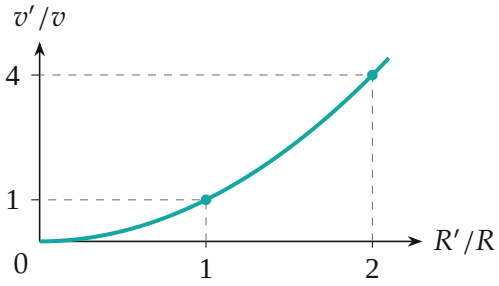
$$Q = \frac{Sv\,\Delta t}{\Delta t} = Sv = \pi R^2 v \quad \Rightarrow \quad v = \frac{Q}{\pi R^2} = \frac{A}{\pi} \cdot \frac{\Delta p\, R^2}{\nu\, l}.$$

6. Что меняется при замене труб. Давление на входе то же, на выходе вода вытекает при атмосферном давлении — значит, перепад Δp прежний. Длина сети l и жидкость (ν) те же. Меняется только радиус: диаметр вдвое больше — радиус тоже, $R' = 2R$. Скорость пропорциональна R^2:

$$\frac{v'}{v} = \left(\frac{R'}{R}\right)^2 = 2^2 = 4.$$



При том же перепаде давления в трубе вдвое большего радиуса жидкость течёт в 4 раза быстрее, а расход больше в 16 раз.



Скорость потока растёт как квадрат радиуса трубы: $v'/v = (R'/R)^2$.

Обратите внимание. Вдвое больший диаметр — вдвое больший радиус: отношение не зависит от того, диаметр или радиус сравнивать. А вот расход и скорость растут по-разному: $Q \propto R^4$, $v \propto R^2$, потому что часть роста расхода «уходит» в бóльшую площадь сечения.

Проверка. Подставим найденные степени:

$$\frac{\text{кг}}{\text{м}\,\text{с}^2} \cdot \text{м}^4 \cdot \frac{\text{м}\,\text{с}}{\text{кг}} \cdot \frac{1}{\text{м}} = \frac{\text{м}^3}{\text{с}}$$

— совпадает с $[Q]$. Знаки разумны: чем больше перепад давления, тем больше расход ($x > 0$), чем вязче жидкость — тем меньше ($z < 0$). Точная формула Пуазейля $Q = \pi\,\Delta p\,R^4/(8\nu l)$ имеет ровно такие степени, $A = \pi/8$.

Смысл: толщина трубы влияет на течение вязкой жидкости очень сильно — трубы чуть шире заметно увеличивают поток.

Ответ. 1) $x = 1$, $y = 4$, $z = -1$, то есть $Q = A\,\dfrac{\Delta p\,R^4}{\nu l}$; 2) скорость течения увеличится в 4 раза.