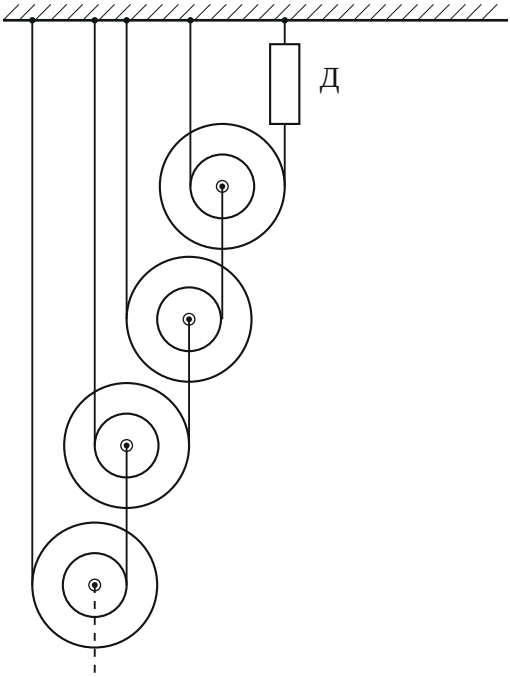
# Бесконечность не предел

**Задача 4.** [МОШ 2024/25, 8 класс, задача 4] Из очень большого количества одинаковых двухступенчатых блоков массой $M = 420$ г каждый и лёгких нитей собрана приведённая на рисунке система. Определите показания динамометра Д, если больший и меньший радиусы ступеней блоков равны соответственно $R = 10$ см и $r = 5$ см. Ускорение свободного падения равно $g = 10$ Н/кг. Трение в осях блоков пренебрежимо мало.




▲ **Решение. Что происходит.** Это задача на равновесие тел, которые могут вращаться: у каждого блока сумма сил и сумма моментов сил равны нулю. Нить, переброшенная через ступень, натянута по-разному слева и справа, если плечи разные — в этом смысл двухступенчатого блока. Цепочка бесконечна, поэтому, отцепив сверху два блока, мы получаем ту же самую систему: натяжение нити, на которой висит третий блок, равно показанию динамометра. Это даёт уравнение на искомую силу.

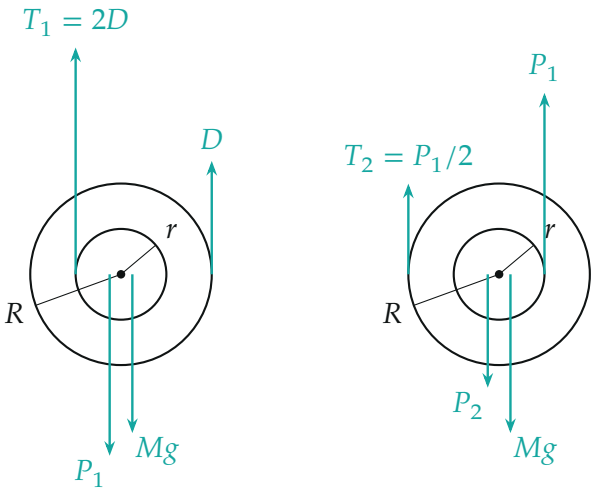
**Обозначения.** Блоки нумеруем сверху: 1, 2, 3, …По рисунку блоки устроены через один одинаково: у нечётных к потолку идёт нить с малой ступени (слева), а вверх справа — с большой; у чётных наоборот. $D$ — показание динамометра, $T_1$, $T_2$ — натяжения нитей, идущих от блоков 1 и 2 к потолку; $P_1$ — натяжение нити, привязанной к оси блока 1 (на ней висит блок 2), $P_2$ — то же для оси блока 2. Нити лёгкие, поэтому натяжение вдоль каждой нити одно и то же.

**1. Блок 1: моменты.** Блок неподвижен, значит, сумма моментов сил относительно его оси равна нулю (правило моментов). Сила тяжести $Mg$ и натяжение $P_1$ приложены к оси и момента не дают. Нить динамометра тянет вверх за большую ступень справа с плечом $R$, нить к потолку — вверх за малую ступень слева с плечом $r$; они поворачивают блок в разные стороны:

$$DR = T_1 r \quad \Rightarrow \quad T_1 = \frac{R}{r} D = 2D.$$

**2. Блок 1: силы.** Второй закон Ньютона для покоящегося блока 1 в проекции на вертикальную ось, направленную вверх:

$$D + T_1 - Mg - P_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad P_1 = D\left(1 + \frac{R}{r}\right) - Mg = 3D - Mg.$$




блок 1 блок 2

*Силы, действующие на блоки 1 и 2. Натяжения нитей, обвивающих ступени, приложены на расстояниях $r$ и $R$ от оси; сила тяжести $Mg$ и натяжение нижней нити ($P_1$ или $P_2$) — к оси. Длины стрелок — по найденным значениям.*

**3. Блок 2: моменты.** На блок 2 нить $P_1$ действует вверх за малую ступень справа (плечо $r$), а нить к потолку — вверх за большую ступень слева (плечо $R$). Правило моментов относительно оси блока 2:

$$P_1 r = T_2 R \quad \Rightarrow \quad T_2 = \frac{r}{R} P_1 = \frac{P_1}{2}.$$

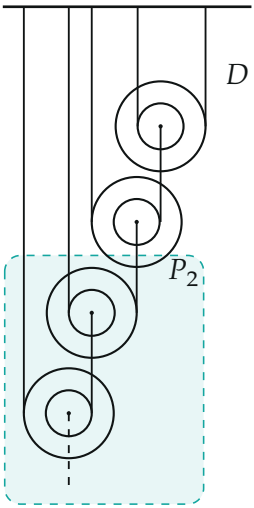
**4. Блок 2: силы.** Второй закон Ньютона для блока 2 в проекции на вертикаль вверх:

$$P_1 + T_2 - Mg - P_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad P_2 = P_1 \left(1 + \frac{r}{R}\right) - Mg = \frac{3}{2} P_1 - Mg.$$

**5. Бесконечность цепочки.** Блок 3 устроен и подвешен так же, как блок 1, блок 4 — как блок 2, и так далее без конца. Нить с натяжением $P_2$ держит блок 3 за большую ступень справа — точно так же, как динамометр держит блок 1. Всё, что висит на этой нити, — та же бесконечная

система, что и вся целиком. Значит, и натяжение то же:

$$P_2 = D.$$




*Часть системы, начиная с блока 3 (выделена), устроена так же, как вся система: её держит нить $P_2$ за большую ступень справа, как динамометр — блок 1.*

**6. Уравнение на $D$.** Подставим $P_1$ из шага 2 в шаг 4 и учтём $P_2 = D$:

$$D = \frac{3}{2}(3D - Mg) - Mg = \frac{9}{2}D - \frac{5}{2}Mg,$$

$$\frac{7}{2}D = \frac{5}{2}Mg \quad \Rightarrow \quad D = \frac{5}{7}Mg.$$

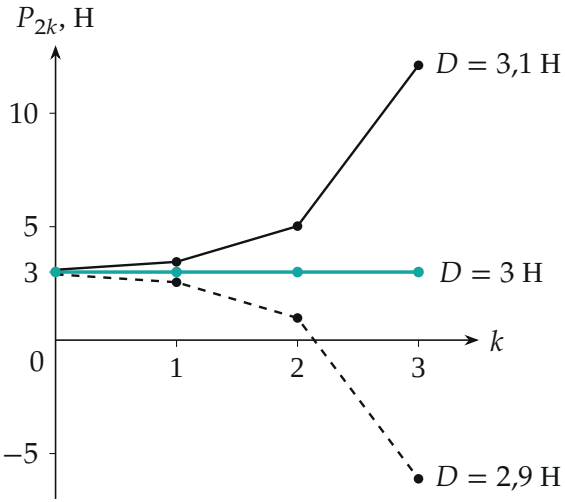
В общем виде, не подставляя $R = 2r$:

$$D = Mg\,\frac{r(2R + r)}{R^2 + Rr + r^2}.$$

**7. Число.** $Mg = 0{,}42$ кг $\cdot$ 10 Н/кг $= 4{,}2$ Н, поэтому

$$D = \frac{5}{7} \cdot 4{,}2 \text{ Н} = 3 \text{ Н}.$$

Заодно $T_1 = 6$ Н, $P_1 = 4{,}8$ Н, $T_2 = 2{,}4$ Н, $P_2 = 3$ Н — все натяжения положительны, все нити натянуты.




*Натяжение нити над блоком $2k + 1$, вычисленное по шагам 2 и 4 сверху вниз для разных показаний $D$. Только при $D = 3$ Н натяжения одинаковы на любой глубине; при другом $D$ отклонение растёт в 4,5 раза каждые два блока, и натяжение либо неограниченно растёт, либо становится отрицательным (нить провисла бы) — такое невозможно.*

**Обратите внимание.** Нить с большой ступени натянута слабее, чем с малой: у блока 1 нить к потолку держит вдвое больше, чем динамометр. Перепутав ступени по рисунку, получим другой ответ — внимательно смотрите, на какой ступени какая нить. Равенство $P_2 = D$ верно, потому что блоки устроены через один одинаково; сравнивать $P_1$ и $D$ нельзя — блок 2 подвешен иначе.

**Проверка.** Размерность: $D \propto Mg$, единицы — ньютоны. Второй способ — равновесие пары блоков 1 и 2 вместе. Внешние силы на пару: $D$, $T_1$, $T_2$ вверх, вес $2Mg$ и натяжение $P_2 = D$ вниз (нить $P_1$ внутренняя). Значит, $T_1 + T_2 = 2Mg$: пара блоков держится только своими нитями к потолку. С $T_1 = 2D$ и $T_2 = P_1/2 = (3D - Mg)/2$ это даёт $\frac{7}{2}D - \frac{1}{2}Mg = 2Mg$, то есть снова $D = \frac{5}{7}Mg$; числа: $6 + 2{,}4 = 8{,}4$ Н $= 2Mg$. Предел:

при $r = R$ (обычные блоки) формула даёт $D = Mg$: тогда все нити натянуты одинаково, с силой $Mg$, — блок висит на двух нитях и держит на оси такую же нить, $2Mg = Mg + Mg$.

Смысл: бесконечная цепочка не делает силу бесконечной — почти весь вес уходит в потолок через боковые нити, а динамометр чувствует только $\frac{5}{7}$ веса одного блока.

**Ответ.** $D = \frac{5}{7}Mg = 3$ Н.