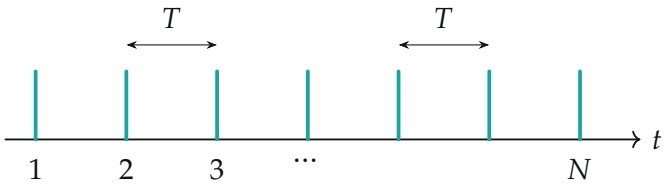
Часы PSR B1937+21

Задача 1. [МОШ 2024/25, 9 класс, задача 1] В современной метрологии эталонным прибором для измерения времени являются атомные часы. Перспективной альтернативой атомным часам могут стать пульсары — быстро вращающиеся нейтронные звезды. Некоторые пульсары обладают поразительной стабильностью вращения, испуская при каждом обороте звезды (через равные промежутки времени) радиосигналы, которые могут быть зарегистрированы на Земле. Пульсар PSR B1937+21 — яркий тому пример.

Период вращения пульсара PSR B1937+21 равен $T = 1{,}557806449$ мс, начальная погрешность измерения этого значения равна $\Delta T_0 = 5 \cdot 10^{-12}$ с. Скорость вращения пульсара может немного изменяться из-за внутренних процессов в звезде. Для учёта этого фактора будем считать, что погрешность периода пульсара увеличивается линейно со временем: $\Delta T(t) = \Delta T_0 + \alpha t$, где $\alpha = 7 \cdot 10^{-21}$ — скорость изменения погрешности. Предположим, что часы на основе пульсара используются для измерения большого промежутка времени t. При каком значении t накопленная погрешность измерения станет равна 1 секунде? Считайте, что среднее значение периода вращения пульсара постоянно и равно T. Ответ выразите в годах.



Поясняющий рисунок: часы-пульсар отсчитывают время числом принятых импульсов N, каждый промежуток между импульсами считается равным T.

▲ **Решение. Что происходит.** Часы на пульсаре работают как любые часы со «тиканьем»: время t измеряют, считая число импульсов $N = t/T$ и умножая его на период. Каждый «тик» известен с погрешностью ΔT,

и погрешности соседних тиков не компенсируются — это систематическая ошибка периода, она набегает с каждым оборотом. Значит, накопленная погрешность — сумма погрешностей всех периодов. Погрешность периода растёт со временем линейно, поэтому сумму удобно считать через среднее значение (или как площадь под графиком $\Delta T(t)$).

Обозначения. $N = t/T$ — число оборотов за время t; $E(t)$ — накопленная за время t погрешность; t^* — искомое время, при котором $E(t^*) = 1$ с.

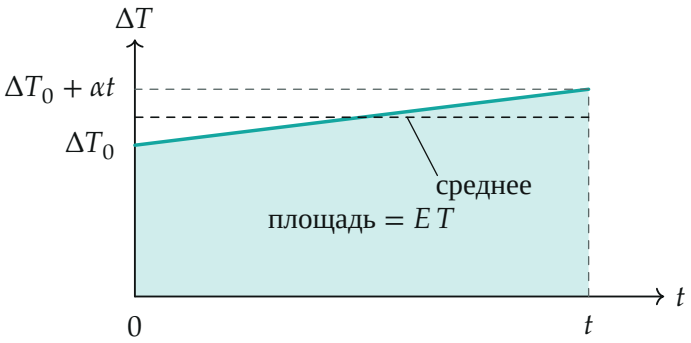
1. Погрешность за малый промежуток. Рассмотрим малый промежуток времени dt около момента t. За него пульсар делает $dN = dt/T$ оборотов, и каждый вносит погрешность $\Delta T(t)$. Вклад промежутка:

$$dE = \Delta T(t)\,\frac{dt}{T}.$$

Просуммируем вклады от начала измерения до момента t:

$$E(t) = \frac{1}{T}\int_0^t (\Delta T_0 + \alpha t')\,dt' = \frac{\Delta T_0\, t}{T} + \frac{\alpha t^2}{2T}.$$

Без интеграла то же самое: ΔT растёт линейно, поэтому средняя погрешность одного периода за время t равна полусумме начальной и конечной, $\Delta T_0 + \frac{1}{2}\alpha t$; умножаем её на число периодов t/T — получаем ту же формулу.



Погрешность одного периода растёт линейно. Сумма погрешностей всех

периодов равна площади трапеции, делённой на T; средняя высота трапеции — полусумма оснований.

2. Уравнение для t^*. Приравняем накопленную погрешность одной секунде:

$$\frac{\alpha}{2T}\,t^{*2} + \frac{\Delta T_0}{T}\,t^* - 1\text{ с} = 0.$$

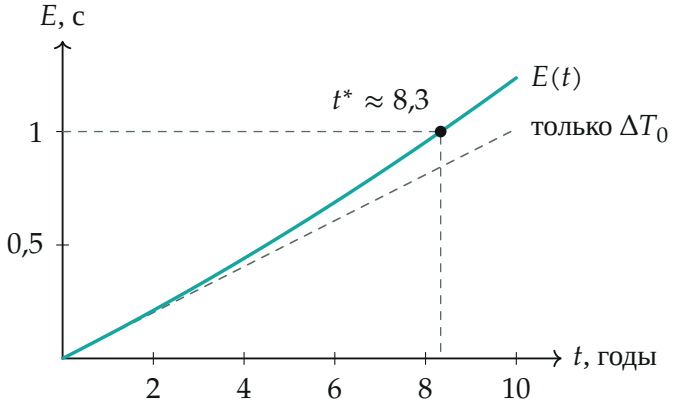
Это квадратное уравнение; физический смысл имеет положительный корень:

$$t^* = \frac{-\Delta T_0 + \sqrt{\Delta T_0^2 + 2\alpha T \cdot 1\text{ с}}}{\alpha}.$$

3. Числа. $\Delta T_0^2 = 2{,}5 \cdot 10^{-23}$ с^2, $2\alpha T \cdot 1\text{ с} = 2 \cdot 7 \cdot 10^{-21} \cdot 1{,}558 \cdot 10^{-3} = 2{,}181 \cdot 10^{-23}$ с^2 — слагаемые одного порядка, ни одно не отбросить.

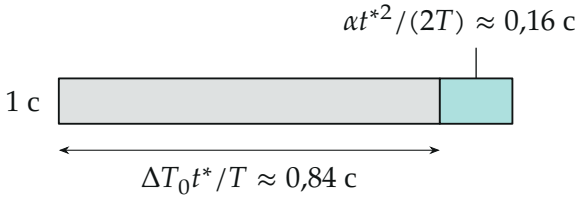
$$t^* = \frac{-5 \cdot 10^{-12} + \sqrt{4{,}681 \cdot 10^{-23}}}{7 \cdot 10^{-21}}\text{ с} = \frac{(6{,}842 - 5) \cdot 10^{-12}}{7 \cdot 10^{-21}}\text{ с} \approx 2{,}63 \cdot 10^8\text{ с}.$$

В году $365{,}25 \cdot 86\,400 \approx 3{,}156 \cdot 10^7$ с, поэтому $t^* \approx 8{,}3$ года. К этому моменту погрешность периода выросла с $5 \cdot 10^{-12}$ до $6{,}84 \cdot 10^{-12}$ с.



Накопленная погрешность $E(t)$ (бирюзой) и то, что дала бы одна начальная погрешность периода (пунктир). Секунда набегает за 8,3 года вместо 9,9.

4. Из чего сложилась секунда. В момент t^* слагаемое начальной погрешности $\Delta T_0 t^*/T \approx 0{,}84$ с, слагаемое роста $\alpha t^{*2}/(2T) \approx 0{,}16$ с. Рост погрешности периода «съедает» полтора года из почти десяти.



Одна секунда накопленной погрешности: вклад начальной погрешности периода и вклад её роста.

Обратите внимание: погрешность складывается по всем t/T периодам, а не берётся у одного периода и не «размывается» случайным образом — среднее значение периода постоянно, но ошибка в его значении у всех периодов одна и та же и набегает линейно.

Проверка. Размерность: $\Delta T_0 t/T$ — секунды, $\alpha t^2/T$ — безразмерное α на $\text{с}^2/\text{с}$, тоже секунды. Пределы: при $\alpha = 0$ получаем $t^* = T \cdot 1\,\text{с}/\Delta T_0 \approx 3{,}1 \cdot 10^8$ с $\approx$ 9,9 года; при $\Delta T_0 = 0$ — $t^* = \sqrt{2T \cdot 1\,\text{с}/\alpha} \approx 21$ год; оба больше 8,3 года, как и должно быть, когда работают обе причины. Подстановка $t^* = 2{,}63 \cdot 10^8$ с в $E(t)$ даёт $0{,}84 + 0{,}16 = 1{,}00$ с.

Ответ. $t = \dfrac{\sqrt{\Delta T_0^2 + 2\alpha T \cdot 1\,\text{с}} - \Delta T_0}{\alpha} \approx 2{,}63 \cdot 10^8$ с $\approx$ 8,3 года.