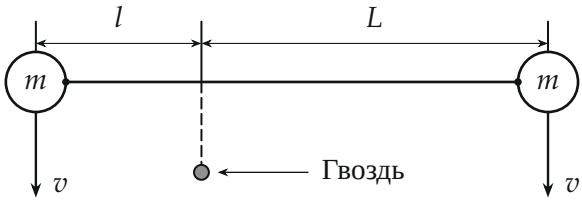
Нецентральный удар

Задача 2. [МОШ 2024/25, 9 класс, задача 2] Две одинаковые шайбы массой m, связанные нерастяжимой лёгкой нитью, движутся по горизонтальной гладкой поверхности со скоростью v, как показано на рисунке.



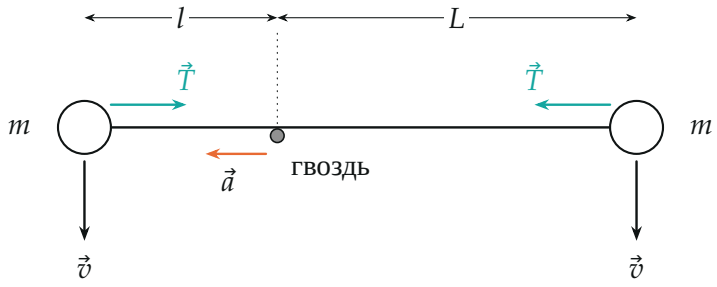
Нить не провисает, но и не натянута. В процессе движения нить налетает на гвоздь. Длины отрезков нити между шайбами и гвоздём равны l и L. Трение между нитью и гвоздём отсутствует.

1. Найдите силу натяжения нити сразу после того, как нить коснётся гвоздя, а также ускорение точки нити, соприкасающейся с гвоздём в этот момент времени.
2. Определите радиусы кривизны траекторий шайб в момент, когда нить коснётся гвоздя.

▲ **Решение. Что происходит.** До касания нить не натянута, и шайбы летят равномерно. Как только середина нити упирается в гвоздь, каждая шайба начинает поворачивать вокруг гвоздя, и нить натягивается. Трения о гвоздь нет, поэтому натяжение T одинаково на обоих отрезках, а нить может проскальзывать по гвоздю. Если бы куски нити не скользили, каждая шайба шла бы по своей окружности: левая с центростремительным ускорением v^2/l, правая — v^2/L. Это разные силы, а натяжение одно, — значит, нить проскальзывает, и длины отрезков начинают меняться. Ключевые законы: второй закон Ньютона для каждой шайбы вдоль нити и нерастяжимость нити (сумма длин отрезков постоянна).

Обозначения. r_1 и r_2 — расстояния от гвоздя до левой и правой шайб, в момент касания $r_1 = l$, $r_2 = L$; ось вдоль каждого отрезка направим от

гвоздя к шайбе; $\ddot{r}_1$, $\ddot{r}_2$ — ускорения, с которыми растут эти расстояния (вторая производная длины отрезка по времени). T — натяжение нити.



Момент касания: на каждую шайбу в плоскости стола действует только натяжение нити, направленное к гвоздю; скорости перпендикулярны нити. Оранжевым — ускорение точки нити у гвоздя (при $L > l$).

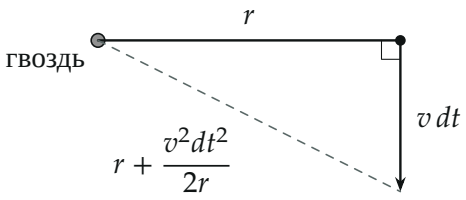
Пункт 1.

1. Как меняется расстояние до гвоздя, если сила не действует. Пусть шайба на расстоянии r от гвоздя движется со скоростью v, перпендикулярной нити. Без всякой силы за малое время dt она сместилась бы перпендикулярно на $v\,dt$, и по теореме Пифагора расстояние до гвоздя стало бы

$$\sqrt{r^2 + v^2 dt^2} \approx r + \frac{v^2}{2r}\,dt^2.$$

Такой прирост, как при равноускоренном движении с ускорением v^2/r: даже свободная шайба «уходит» от гвоздя с ускорением v^2/r вдоль нити. Натяжение тянет её к гвоздю и уменьшает это ускорение на T/m (второй закон Ньютона вдоль нити — единственная горизонтальная сила T). Поэтому ускорение изменения длины отрезка:

$$\ddot{r}_1 = \frac{v^2}{l} - \frac{T}{m}, \qquad \ddot{r}_2 = \frac{v^2}{L} - \frac{T}{m}.$$



Шайба без силы: смещение $v\,dt$ поперёк нити удлиняет расстояние до гвоздя на величину второго порядка $\frac{v^2dt^2}{2r}$ — как равноускоренный уход с ускорением v^2/r. Масштаб dt увеличен.

2. Нерастяжимость нити. Длина нити $r_1 + r_2$ постоянна, значит, $\ddot{r}_1 + \ddot{r}_2 = 0$:

$$\frac{v^2}{l} + \frac{v^2}{L} - \frac{2T}{m} = 0 \quad \Longrightarrow \quad T = \frac{mv^2}{2}\left(\frac{1}{l} + \frac{1}{L}\right) = mv^2\,\frac{L+l}{2Ll}.$$

Натяжение — среднее арифметическое тех двух сил mv^2/l и mv^2/L, которые были бы нужны для поворота без проскальзывания.

3. Ускорение точки нити у гвоздя. В момент касания длины отрезков не меняются (скорости шайб перпендикулярны нити), поэтому точка нити у гвоздя покоится, но её ускорение не ноль: на сколько удлиняется левый отрезок, на столько нить протягивается через гвоздь. Ускорение этой точки вдоль нити равно $\ddot{r}_1$:

$$a = \ddot{r}_1 = \frac{v^2}{l} - \frac{v^2}{2}\left(\frac{1}{l} + \frac{1}{L}\right) = v^2\,\frac{L-l}{2Ll}.$$

При $L > l$ оно положительно: левый, короткий отрезок удлиняется, и точка нити у гвоздя ускоряется вдоль нити в сторону шайбы на коротком отрезке.

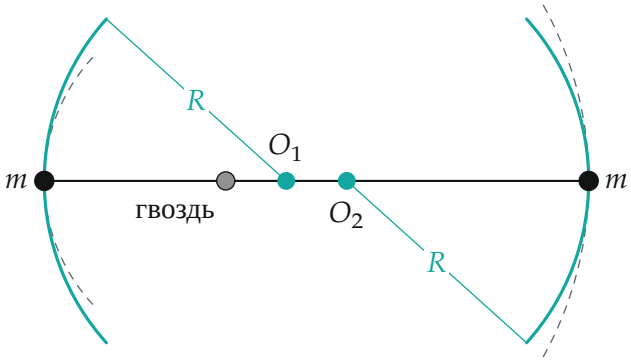
Пункт 2.

4. Радиус кривизны. Скорость каждой шайбы перпендикулярна нити, а единственная горизонтальная сила T направлена вдоль нити. Значит, касательного ускорения нет, и всё ускорение T/m — нормальное.

По определению радиуса кривизны $a_n = v^2/R$:

$$R = \frac{v^2}{T/m} = \frac{2Ll}{L+l}.$$

Для обеих шайб радиус одинаков: скорости и силы у них одинаковы. Он лежит между l и L: короткая сторона поворачивает слабее, чем по окружности вокруг гвоздя ($R > l$), длинная — сильнее ($R < L$).



При $L = 2l$: $R = \frac{4}{3}l$. Бирюзой — окружности кривизны траекторий шайб (центры O_1, O_2), пунктиром — окружности вокруг гвоздя, по которым шайбы пошли бы без проскальзывания нити.

Обратите внимание: радиус кривизны — не l и не L. Нить скользит по гвоздю, поэтому шайбы в этот момент не вращаются вокруг гвоздя по окружностям, а центр кривизны каждой траектории — не гвоздь.

Проверка. Размерности: mv^2/l — ньютоны, v^2/l — м/с^2, $Ll/(L+l)$ — метры. Предел $L = l$: $T = mv^2/l$, $a = 0$, $R = l$ — симметричный случай, нить не скользит, обе шайбы идут по окружности радиуса l вокруг гвоздя, как и должно быть. Предел $L \to \infty$: $T \to mv^2/(2l)$, $R \to 2l$ — правая шайба почти не держит, нить вытягивается в её сторону.

Ответ. 1) $T = mv^2\,\dfrac{L+l}{2Ll}$; ускорение точки нити у гвоздя $a = v^2\,\dfrac{L-l}{2Ll}$, вдоль нити в сторону шайбы на коротком отрезке l; 2) у обеих шайб $R = \dfrac{2Ll}{L+l}$.