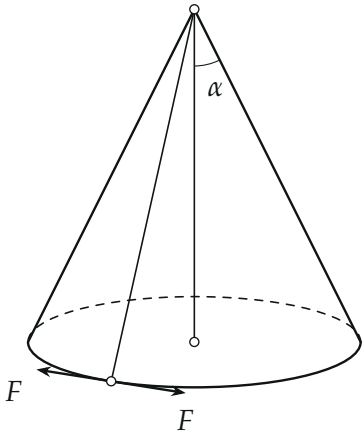
Бумажный конус

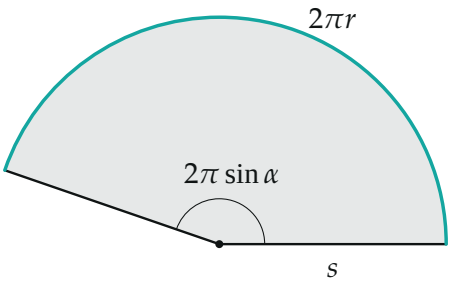
Задача 3. [МОШ 2024/25, 9 класс, задача 3] Из листа бумаги в форме сектора круга свернули конус массы m с углом раствора 2α. Конус помещают на горизонтальную поверхность стола, прогибания бумаги не происходит. Трение между бумагой и столом отсутствует. Чтобы под действием силы тяжести конус не развалился, к краям бумаги, расположенным на линии разреза, прикладывают пару сил величиной F, направленных по касательной к окружности основания конуса (см. рисунок). Распределение массы по листу считайте однородным. Пренебрегая всеми эффектами, связанными с изгибом, найдите значение силы F.



▲ **Решение. Что происходит.** Бумажный конус под собственным весом «оседает»: образующие скользят по гладкому столу в стороны, радиус основания растёт, высота падает, центр масс опускается. Длина образующей при этом не меняется (бумага не растягивается), а вот окружности основания нужно больше бумаги, чем есть в листе, — края на разрезе расходятся. Пара сил F держит края вместе. Считать распределённые по конусу силы реакции и упругости неудобно, поэтому применим метод виртуальных перемещений (энергетический метод): в равновесии при малом мысленном смещении сумма работ всех сил равна нулю. Сила реакции гладкого стола работы не совершает — она вертикальна, а точки основания сдвигаются горизонтально.

Обозначения. s — длина образующей (радиус бумажного сектора); $r = s\sin\alpha$ — радиус основания; $h = s\cos\alpha$ — высота конуса; h_c — высота центра масс над столом.

1. Сколько бумаги на окружности основания. Развернём конус: это сектор радиуса s, длина его дуги равна длине окружности основания $2\pi r$. Лист задан, значит, дуга бумаги фиксирована. Если радиус основания стал $r + dr$, окружности нужно $2\pi(r + dr)$ — на $2\pi\, dr$ больше, чем есть: края на разрезе разойдутся на $2\pi\, dr$ вдоль окружности основания, то есть как раз вдоль сил F.

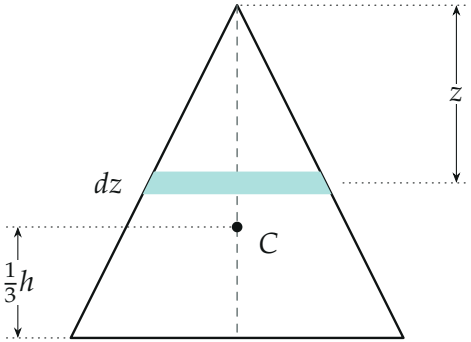


Развёртка конуса: сектор радиуса s, дуга (бирюзой) — окружность основания $2\pi r = 2\pi s\sin\alpha$.

2. Высота центра масс. Масса распределена по боковой поверхности равномерно. Разрежем поверхность на тонкие кольца на расстоянии z от вершины по высоте, толщиной dz. Радиус кольца пропорционален z, ширина полоски вдоль образующей пропорциональна dz, поэтому площадь и масса кольца пропорциональны $z\, dz$. Средняя высота по такому распределению:

$$\bar{z} = \frac{\int_0^h z \cdot z\, dz}{\int_0^h z\, dz} = \frac{h^3/3}{h^2/2} = \frac{2}{3}h.$$

Центр масс — на расстоянии $\frac{2}{3}h$ от вершины, то есть на высоте $h_c = \frac{1}{3}h$ над столом. Тот же результат: развёртка — сектор, его можно разбить на узкие треугольники с вершиной в центре, у каждого центр масс — на $\frac{2}{3}$ медианы от вершины.

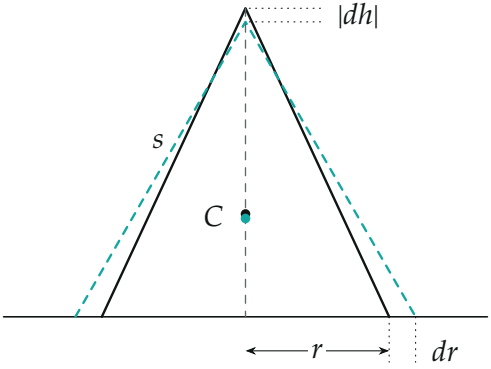


Боковая поверхность в разрезе: масса кольца на глубине z пропорциональна $z\,dz$; центр масс C — на высоте $\frac{1}{3}h$.

3. Малое смещение. Пусть конус чуть осел: $r \to r + dr$, $h \to h + dh$ ($dh < 0$). Образующая не меняется: $r^2 + h^2 = s^2$, отсюда $2r\,dr + 2h\,dh = 0$ и

$$dh = -\frac{r}{h}\,dr = -\operatorname{tg}\alpha\,dr.$$

Центр масс опустился на $\frac{1}{3}|dh|$.

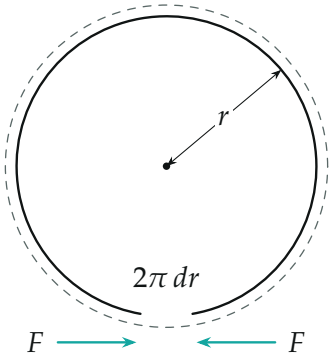


Конус оседает (пунктир, смещение преувеличено): образующая s та же, основание шире на dr, вершина ниже на $|dh|$, центр масс — ниже на $\frac{1}{3}|dh|$.

4. Работы сил. Сила тяжести совершает работу $-mg\,dh_c = \frac{1}{3}mg\,\operatorname{tg}\alpha\,dr$ (положительную: центр масс опускается). Пара сил F направлена вдоль окружности основания и не даёт краям разойтись: края расходятся на

$2\pi\,dr$ против сил, работа пары $-F\cdot 2\pi\,dr$. Сила реакции стола вертикальна и работы не совершает (трения нет). Принцип виртуальных перемещений для равновесия: сумма работ равна нулю,

$$\frac{1}{3}mg\ \operatorname{tg}\alpha\,dr - 2\pi F\,dr = 0 \quad\Longrightarrow\quad F = \frac{mg\ \operatorname{tg}\alpha}{6\pi}.$$



Вид сверху на основание: если конус осядет, края у разреза разойдутся на $2\pi\,dr$ (зазор преувеличен); силы F, приложенные к краям, стягивают их. Пунктир — окружность после оседания.

Обратите внимание: сила F совершает работу не на перемещении «точки разреза» вниз, а на расхождении краёв по окружности основания — именно вдоль неё направлены силы, и именно на $2\pi\,dr$ разошлись края. Масса сосредоточена на боковой поверхности, поэтому центр масс — на $\frac{1}{3}h$, а не на $\frac{1}{4}h$, как у сплошного конуса.

Проверка. Размерность: mg — ньютоны, $\operatorname{tg}\alpha$ безразмерен. Пределы: узкий конус $\alpha\to 0$ — $F\to 0$, «иголка» стоит сама, оседание почти не опускает центр масс; плоский конус $\alpha\to 90^\circ$ — $F\to\infty$, почти плоский лист держать конусом не получится. Второй способ того же шага: потенциальная энергия как функция радиуса $U(r)=\frac{1}{3}mg\sqrt{s^2-r^2}$, сила пары равна $-\dfrac{1}{2\pi}\dfrac{dU}{dr}=\dfrac{mg\,r}{6\pi\sqrt{s^2-r^2}}=\dfrac{mg\ \operatorname{tg}\alpha}{6\pi}$ — то же. Смысл: держать приходится тем сильнее, чем более плоский конус, и сила не зависит от его размера.

Ответ. $F = \dfrac{mg}{6\pi}\,\mathrm{tg}\,\alpha.$