Мост Томсона

Задача 5. [МОШ 2024/25, 9 класс, задача 5] Одной из проблем при измерении малых сопротивлений является сравнительно большое сопротивление подводящих проводов и контактов этих проводов с измеряемым сопротивлением. Опишем такое малое сопротивление R с суммарным сопротивлением подводящих проводов r (включая контактные сопротивления) простейшей эквивалентной схемой, изображённой на рисунке 1.

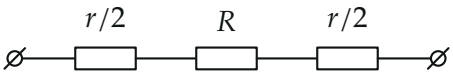


Рис. 1

Так, например, при сравнении двух малых сопротивлений R_1 и R_2 с помощью мостиковой схемы Уитстона (схема на рисунке 2), возникает ошибка, связанная с наличием контактного сопротивления.

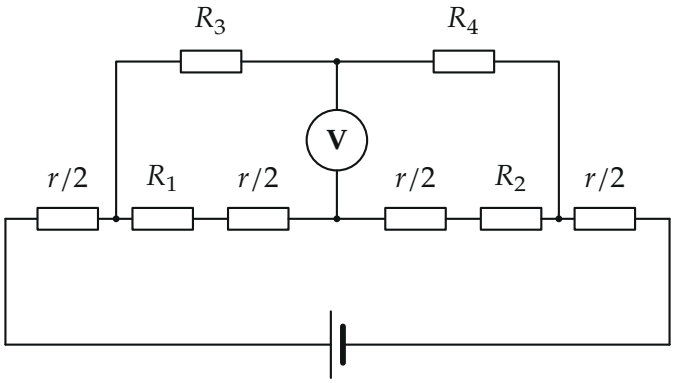


Рис. 2

Для исключения этой ошибки Уильямом Томсоном была предложена более сложная схема сравнения сопротивлений (см. рисунок 3), которая в дальнейшем приобрела название «мост Томсона».

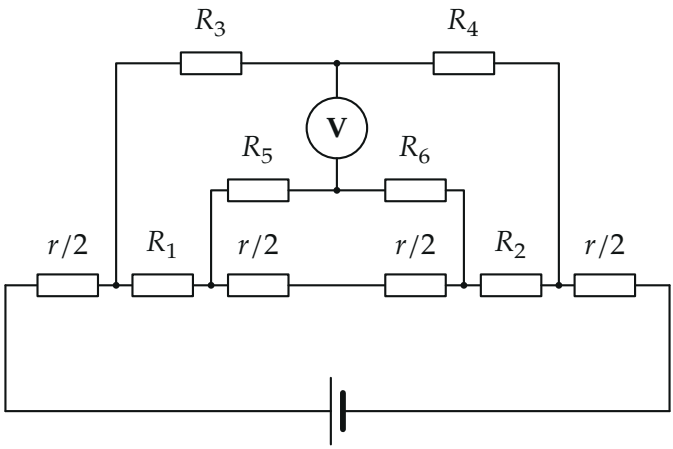


Рис. 3

1. Рассчитайте сопротивление R_1 в схеме на рисунке 3, если напряжение, регистрируемое вольтметром, равно нулю (мост сбалансирован). Считайте остальные сопротивления, включая сопротивление подводящих проводов, известными.
2. При каком соотношении между сопротивлениями R_3, R_4, R_5, R_6 ответ на первый вопрос не зависит от r?
3. Технически наиболее удобно выбирать сопротивления R_3, R_4, R_5, R_6 много большими сопротивлений R_1, R_2 и сопротивления подводящих проводов r. Дайте ответ на вопрос пункта а) с учётом этого приближения (округлив ответ до первого порядка малости).

▲ **Решение. Что происходит.** Мост сбалансирован: вольтметр показывает ноль, значит, потенциалы точек его подключения равны и ток через вольтметр не идёт — его можно мысленно убрать. Тогда схема распадается на простые последовательные и параллельные участки, и каждый потенциал находится законом Ома. Это задача на расчёт потенциалов узлов: идём от одного узла по ветвям и вычитаем падения напряжения IR. Сначала поймём, в чём ошибка моста Уитстона, — потом увидим, как схема Томсона её убирает.

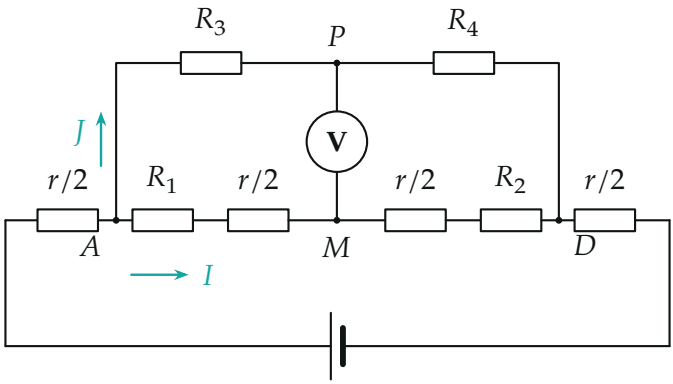
Обозначения. Узлы рис. 3: A — подключение R_3, B — подключение R_5, C — подключение R_6, D — подключение R_4; P и Q — точки подключения вольтметра. Внешние $r/2$ (левее A и правее D) лишь после-

довательны с источником и на баланс не влияют. Между B и C — два внутренних куска провода $r/2 + r/2 = r$. I — ток через R_1 (он же через R_2), i — ток ветви R_5R_6, J — ток ветви R_3R_4. Потенциал узла A примем за нуль.

1. Почему ошибается мост Уитстона. В схеме рис. 2 при балансе ток через вольтметр не идёт. Падения напряжения: от A до P — JR_3, от A до M — $I(R_1 + r/2)$; от P до D — JR_4, от M до D — $I(R_2 + r/2)$. Равенство потенциалов P и M даёт

$$\frac{R_1 + r/2}{R_2 + r/2} = \frac{R_3}{R_4} \quad \Longrightarrow \quad R_1 = \frac{R_2R_3}{R_4} + \frac{r}{2}\Big(\frac{R_3}{R_4} - 1\Big).$$

Мост сравнивает не R_1 и R_2, а $R_1 + r/2$ и $R_2 + r/2$; для малых сопротивлений добавка $\sim r$ сравнима с самим R_1.

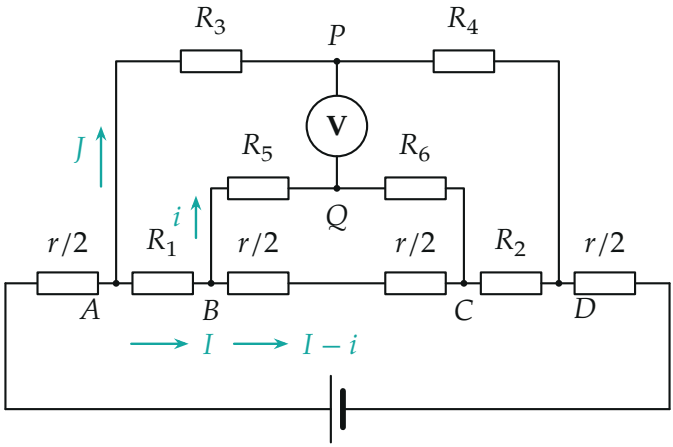


Мост Уитстона: в плечах нижней ветви вместе с R_1 и R_2 стоят провода $r/2$.

Пункт 1.

2. Токи моста Томсона. Вольтметр тока не берёт, поэтому ветвь $B-R_5-Q-R_6-C$ и провод r между B и C соединены параллельно. Напряжение U_{BC} общее: $i(R_5 + R_6) = (I - i)\,r$, откуда

$$i = \frac{r}{r + R_5 + R_6}\,I.$$



Мост Томсона: ток I из R_1 в узле B делится между проводом r и ветвью R_5R_6 и снова собирается в узле C.

3. Потенциалы точек вольтметра. Идём от A (закон Ома для каждого участка):

$$\varphi_Q = -IR_1 - iR_5, \qquad \varphi_P = -JR_3.$$

Ток J найдём из того, что обе дороги из A в D дают одно и то же напряжение U_{AD}:

$$J(R_3 + R_4) = IR_1 + i(R_5 + R_6) + IR_2.$$

4. Условие баланса $\varphi_P = \varphi_Q$: $JR_3 = IR_1 + iR_5$. Подставим J и обозначим $k = \dfrac{R_3}{R_3 + R_4}$:

$$IR_1 + iR_5 = k(IR_1 + IR_2 + i(R_5 + R_6)).$$

Соберём R_1 слева: $IR_1(1-k) = kIR_2 + i(k(R_5 + R_6) - R_5)$. Учтём $1 - k = \dfrac{R_4}{R_3 + R_4}$, умножим на $\dfrac{R_3 + R_4}{R_4 I}$ и подставим i/I:

$$R_1 = \frac{R_2R_3}{R_4} + \frac{r}{r + R_5 + R_6}\left(\frac{R_3R_6}{R_4} - R_5\right).$$

Ток I сократился, как и должно быть у моста: баланс не зависит от напряжения источника.

Пункт 2.

5. Когда r выпадает. Второе слагаемое пропадает при любом r, только если скобка равна нулю:

$$\frac{R_3R_6}{R_4} = R_5 \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{R_3}{R_4} = \frac{R_5}{R_6}.$$

Тогда $R_1 = \dfrac{R_2R_3}{R_4}$ точно. Смысл: внутренний делитель $R_5 : R_6$ делит падение напряжения на проводе r в той же пропорции, что внешний делитель $R_3 : R_4$ делит всё, и вклад провода в обе точки вольтметра одинаков.

Пункт 3.

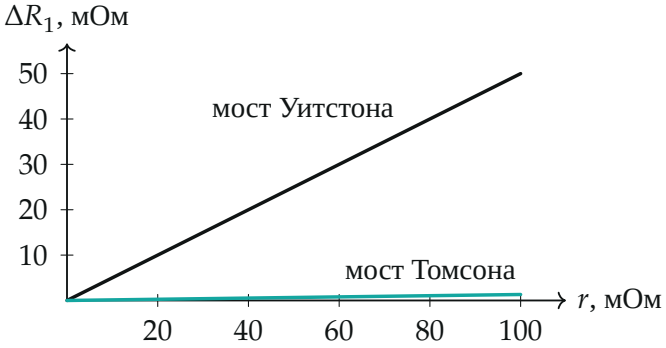
6. Большие $R_3, \dots, R_6$. Если $R_5, R_6 \gg r$, то в знаменателе r мало по сравнению с $R_5 + R_6$:

$$\frac{r}{r + R_5 + R_6} = \frac{r}{R_5 + R_6}\Big(1 - \frac{r}{R_5 + R_6} + \dots\Big) \approx \frac{r}{R_5 + R_6},$$

и с точностью до первого порядка по малому $r/(R_5 + R_6)$

$$R_1 \approx \frac{R_2R_3}{R_4} + r\,\frac{R_3R_6 - R_4R_5}{R_4(R_5 + R_6)}.$$

Коэффициент при r — отношение больших сопротивлений; он порядка единицы, если условие пункта 2 не выполнено, и мал, если $R_3/R_4 \approx R_5/R_6$; при точном равенстве $R_1 = R_2R_3/R_4$. У моста Уитстона тот же коэффициент равен $\frac{1}{2}(R_3/R_4 - 1)$, и подбором плеч его не убрать, не меняя сравниваемого отношения. Большие $R_3, \dots, R_6$ удобны тем, что ток в этих ветвях ничтожен, и сопротивления их собственных проводов и контактов на баланс не влияют.



Ошибка измерения ΔR_1 от сопротивления проводов r при $R_3/R_4 = 2$: мост Уитстона ошибается на $r/2$; мост Томсона при $R_5 = 100$ Ом, $R_6 = 51$ Ом (рассогласование 2 %) — на $0{,}013\,r$, при $R_6 = 50$ Ом — на ноль.

Обратите внимание: вольтметр показывает ноль — значит, ток через него равен нулю, и его ветвь из расчёта токов выпадает; именно поэтому провод r и ветвь R_5R_6 соединены параллельно. У организаторов в ответе на пункт 3 стоит $R_1 = R_2R_3/R_4$ — это верно, когда, кроме условия $R_{3..6} \gg r$, выполнено и условие пункта 2.

Проверка. Размерности: второе слагаемое — безразмерная дробь на омы. Пределы: $r = 0$ — обычное условие равновесия моста $R_1/R_2 = R_3/R_4$; $R_5, R_6 \to \infty$ — ветвь R_5R_6 тока не берёт, Q просто делит провод, и поправка исчезает только при $R_3/R_4 = R_5/R_6$, как в пункте 2; $R_5 = R_6 = 0$ — провод между B и C закорочен, скобка равна нулю и $R_1 = R_2R_3/R_4$, как у моста без проводов.

Ответ. 1) $R_1 = \dfrac{R_2R_3}{R_4} + \dfrac{r}{r + R_5 + R_6}\left(\dfrac{R_3R_6}{R_4} - R_5\right)$; 2) $\dfrac{R_3}{R_4} = \dfrac{R_5}{R_6}$, то есть $R_3R_6 = R_4R_5$; 3) $R_1 \approx \dfrac{R_2R_3}{R_4} + r\,\dfrac{R_3R_6 - R_4R_5}{R_4(R_5 + R_6)}$; при выполнении условия пункта 2 $R_1 = \dfrac{R_2R_3}{R_4}$.